Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Ensimmäisen kurssikokeen ratkaisut ja arvosteluperusteet
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. Mitkä metriikan ehdot kuvaus $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|,$$

toteuttaa? Onko se metriikka? Perustele!

Ratkaisu. Tarkastellaan ehtoja yksi kerrallaan.

(M0) Funktio d on positiivinen itseisarvojen positiivisuuden nojalla. Siis ehto (M0) toteutuu.

(M1) Olkoon $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| \\ &= |x_1^2 - z_1^2 + z_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - z_2^2 + z_2^2 - y_2^2| \\ &\overset{(*)}{\leq} |x_1^2 - z_1^2| + |z_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - z_2^2| + |z_2^2 - y_2^2| \\ &= (|x_1^2 - z_1^2| + |x_2^2 - z_2^2|) + (|z_1^2 - y_1^2| + |z_2^2 - y_2^2|) \\ &= d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d((z_1, z_2), (y_1, y_2)), \end{aligned}$$

joten ehto (M1) (kolmioepäyhtälö) toteutuu. Kohdassa (*) käytettiin reaalilukujen kolmioepäyhtälöä.

(M2) Koska $|a - b| = |(-1)(b - a)| = |-1||b - a| = |b - a|$ kaikilla reaaliluvuilla a ja b, niin

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| \\ &= |y_1^2 - x_1^2| + |y_2^2 - x_2^2| \\ &= d((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

kaikilla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Siten ehto (M2) (symmetrisyys) toteutuu.

(M3) Huomataan, että

$$d((1, 1), (-1, -1)) = |1^2 - (-1)^2| + |1^2 - (-1)^2| = 0,$$

vaikka $(1, 1) \neq (-1, -1)$. Siten ehto (M3) ei toteudu.

Funktio d toteuttaa siis metriikan ehdot (M0)-(M2). Se ei toteuta ehtoa (M3), joten se ei ole metriikka. $\square$

Arvostelusta.

- ehto (M0) +1p
- ehto (M1) +1,5p
- ehto (M2) +1p
- ehto (M3) +1,5p
- kokonaisuus / loppupäätelmä +1p
- Jos osoitti tietävänsä, mitä ehto tarkoittaa, ja päättelyssä oli päässyt ainakin alkuun, sai +0,5 pistettä.

2. a) Määrittele käsitteet avoin joukko ja suljettu joukko.
   b) Osoita, että avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Ratkaisu. a) Joukko $A \subset X$ on avoin avaruudessa X, jos A on tyhjä joukko tai jokaisella $a \in A$ on olemassa sellainen luku $r_a > 0$, että $B(a, r_a) \subset A$. Joukko $B \subset X$ on suljettu, jos sen komplementti B^c on avoin.

b) Olkoot $A_1, A_2, \dots, A_k \subset X$ avoimia joukkoja. Jos $A_i = \emptyset$ jollakin $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, niin $\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset$, jolloin leikkausjoukko on avoin. Voimme siis olettaa, että $A_i \neq \emptyset$ jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Olkoon $a \in \bigcap_{i=1}^k A_i$. Siten $a \in A_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, joten on olemassa sellaiset luvut $r_{a,i} > 0$, että $B(a, r_{a,i}) \subset A_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Olkoon $r_a = \min\{r_{a,1}, r_{a,2}, \dots, r_{a,k}\}$. Minimi on olemassa ja $r_a > 0$, koska lukuja $r_{a,i}$ on vain äärellinen määrä. Tällöin $B(a, r_a) \subset \bigcap_{i=1}^k A_i$, joten joukko $\bigcap_{i=1}^k A_i$ on avoin.

$\square$

Arvostelusta.

a-kohta
- avoimen joukon määritelmä +2p
- suljetun joukon määritelmä +1p
- Epätarkkuudet verottivat 1,5-3 pistettä riippuen siitä, kuinka suurista epätarkkuuksista oli kysymys.

b-kohta
- +3p
- Pienistä epätarkkuuksista ei sakotettu, mutta säde r_a tuli konkreettisesti valita miniminä säteistä $r_{a,i}$.
- Jos päättelyssä pääsi edes jonkin verran oikeaan suuntaan, saattoi saada 0,5-1,5 pistettä.
- Väitteen osoittaminen suljettujen joukkojen avulla antoi korkeintaan 0,5 pistettä, sillä kyseessä oli kehäpäättely: olemme osoittaneet, että suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu käyttäen tulosta, joka tuli todistaa tässä tehtävässä.

3. Olkoon (X, d) epätyhjä metrinen avaruus ja $a \in X$ kiinnitetty piste.

a) Osoita, että kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$, on 1-Lipschitz.

b) Osoita, että joukko $A = \{x \in X : 2 < d(x, a) < 5\}$ on avoin joukko.

Ratkaisu. a) Olkoot $x, y \in X$. Tällöin kolmioepäyhtälön ja metriikan symmetrisyyden nojalla pätee

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq d(x,y) + d(y,a) && \text{ja} \\ d(y,a) &\leq d(y,x) + d(x,a) = d(x,y) + d(x,a), \end{aligned}$$

joten erityisesti

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq d(x,a) - d(y,a) \quad \text{ja} \\ d(x,y) &\geq d(y,a) - d(x,a). \end{aligned}$$

Siten $d(x, y) \geq |d(x, a) - d(y, a)|$, eli

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y).$$

Siten kuvaus f on 1-Lipschitz.

b) Koska a-kohdan kuvaus f on 1-Lipschitz, se on jatkuva kuvaus. Siten koska

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \ : \ 2 < d(x,a) < 5\} \\ &= \{x \in X \ : \ 2 < f(x) < 5\} \\ &= \{x \in X \ : f(x) \in \,]2,5[\} \\ &= f^{-1}]2,5[, \end{aligned}$$

niin joukko A on avoimen joukon alkukuvana avoin.

□

Arvostelusta.

a-kohta

- Lipschitz-ehdon muistaminen (ja ainakin jonkinlainen muotoilu) +1p
- väitteen todistus tarkasti +2p
- Kirjan Lauseeseen 2.10 tai Sovellukseen 4.6 vetoaminen antoi 0,5 pistettä, sillä ajatuksena oli todistaa Lauseen 2.10 heikompi muoto. Tämä osoittautui yleisesti ottaen haastavaksi.

b-kohta

- Lipschitz-kuvaukset jatkuvia +1p
- avointen joukkojen alkukuvat jatkuvassa kuvauksessa avoimia +1p
- yksityiskohdat +1p
- Epätarkkuuksista ja virheellisistä argumenteista sakotettiin 0,5-3 pistettä.

4. a) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $a \in Y$ kiinnitetty piste. Osoita, että kuvaus $f \colon X \to Y$, $f(x) = a$, on jatkuva.

b) Olkoon $d_{\{0,1\}}$ joukon $\mathbb{R}$ $\{0,1\}$-metriikka ja d_e joukon $\mathbb{R}$ euklidinen metriikka. Osoita, että kuvaus $f \colon (\mathbb{R}, d_e) \to (\mathbb{R}, d_{\{0,1\}})$, $f(x) = x$, ei ole jatkuva.

Ratkaisu. a) Tapa 1. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin kaikilla $x, y \in X$ on voimassa

$$d'(f(x), f(y)) = d'(a, a) = 0 < \varepsilon,$$

joten kuvaus f on määritelmän nojalla jatkuva.

Tapa 2. Olkoot $x, y \in X$. Tällöin

$$d'(f(x), f(y)) = d'(a, a) = 0 = 0 \cdot d(x, y),$$

joten kuvaus f on 0-Lipschitz ja siten jatkuva.

Tapa 3. Olkoon $A \subset Y$ avoin joukko. Jos $a \in A$, niin $f^{-1}A = X$, jolloin $f^{-1}A$ on avoin. Jos taas $a \notin A$, niin $f^{-1}A = \emptyset$, jolloin $f^{-1}A$ on myös avoin. Siten mielivaltaisen avoimen joukon alkukuva on avoin, joten Lauseen 4.8 nojalla kuvaus f on jatkuva.

b) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen piste. Valitaan $\varepsilon = 1/2$. Tällöin jokaisella $\delta > 0$ on voimassa $d_e(x, x + \delta/2) < \delta$, mutta

$$d_{\{0,1\}}(f(x), f(x + \delta/2)) = d_{\{0,1\}}(x, x + \delta/2) = 1 > \varepsilon.$$

Siis kuvaus f ei ole jatkuva pisteessä x.

$\square$

Arvostelusta.

a-kohta
- Oikeasta todistuksesta sai 3 pistettä.
- Epätarkkuuksista ja vääristä argumenteista vähennettiin 0,5-3 pistettä.

b-kohta
- $\{0,1\}$-metriikka $+1$p
- todistus $+2$p
- Epätarkkuuksista ja vääristä argumenteista vähennettiin 0,5-3 pistettä.

5. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ehdolla

$$f(x,y) = \left(xy^4 + 5, e^{e^x}, y + 4\right).$$

a) Osoita, että f on jatkuva kuvaus.

b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa osajoukko. Osoita, että joukko

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^4 \in [2,3], e^{e^x} \in [1,2], y \in [4,8]\} \cap A$$

on suljettu joukossa A euklidisen metriikan suhteen. Saat pitää tunnettun tietoa, että joukko $[7,8] \times [1,2] \times [8,12]$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^3$ euklidisen metriikan suhteen.

Ratkaisu.

a) Kurssin tulosten nojalla tiedetään, että kuvaus f on jatkuva jos ja vain jos sen komponenttikuvaukset ovat jatkuvia (Lause 5.9). Kuvauksen f komponenttikuvaukset ovat $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= xy^4 + 5, \\ f_2(x,y) &= e^{e^x}, \\ f_3(x,y) &= y + 4. \end{aligned}$$

Muistetaan, että jatkuvien kuvausten summat ja tulot ovat jatkuvia, projektiokuvaukset pr_1 ja pr_2 ovat jatkuvia, jatkuvien kuvausten yhdisteet ovat jatkuvia, vakiokuvaukset ovat jatkuvia ja eksponenttikuvaus $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, on jatkuva. Siten

- kuvaus $(x,y) \mapsto xy^4$ on projektiokuvausten tulona jatkuva ja kuvaus f_1 on kahden jatkuvan kuvauksen summana jatkuva,
- kuvaus $f_2 = \exp \circ \exp \circ \mathrm{pr}_1$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva, ja
- kuvaus f_3 on projektiokuvauksen ja vakiokuvauksen summana jatkuva.

Siten kuvaus f on jatkuva.

b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa joukko ja merkitään $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^4 \in [2,3], e^{e^x} \in [1,2], y \in [4,8]\}$. Huomataan, että nyt

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^4 \in [2,3], e^{e^x} \in [1,2], y \in [4,8]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^4 + 5 \in [7,8], e^{e^x} \in [1,2], y + 4 \in [8,12]\} \\ &= f^{-1}[7,8] \times [1,2] \times [8,12]. \end{aligned}$$

Koska kuvaus f on jatkuva kohdan a nojalla, niin joukko B on suljetun joukon alkukuvana suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Siten joukko $B \cap A$ on suljettu joukossa A Lauseen 7.7 nojalla. $\square$

Arvostelusta.

a-kohta
- komponenttikuvausten muodostaminen +1p
- komponenttikuvausten jatkuvuuden perusteu +1p
- kuvaus f on jatkuva jos ja vain jos sen komponenttikuvaukset ovat jatkuvia +1p
- Epätarkkuuksista ja vääristä argumenteista vähennettiin tapauskohtaisesti.

b-kohta
- perustelu sille että joukko B on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ +1,5p
- perustelu sille että joukko $B \cap A$ on suljettu joukossa A +1,5p
- Epätarkkuuksista ja vääristä argumenteista vähennettiin tapauskohtaisesti.

6. Varustetaan avaruus $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ max-metriikalla d:

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Osoita, että joukko $A = \{f \in C[0,1] \mid f(x) \leq 0 \text{ jollakin } x \in [0,1]\}$ on oma sulkeumansa avaruudessa $C[0,1]$.

Ratkaisu. Muistetaan, että joukko A on oma sulkeumansa (eli $A = \overline{A}$) jos ja vain jos A on suljettu. Riittää siis osoittaa, että A on suljettu.

Huomataan, että

$$A^c = \{f \in C[0,1] : f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

Olkoon $g \in A^c$. Koska g on jatkuva, se saavuttaa välillä $[0,1]$ pienimmän arvonsa. Merkitään $a = \min_{x \in [0,1]} g(x)$. Koska $g \in A^c$, niin $a > 0$. Valitaan $r_g = a/2$. Olkoon $h \in B(g, r_g)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
& d(g,h) < r_g \\
\Longrightarrow \quad & \max_{x \in [0,1]} |g(x) - h(x)| < r_g \\
\Longrightarrow \quad & g(x) - h(x) < r_g \text{ kaikilla } x \in [0,1] \\
\Longrightarrow \quad & h(x) > g(x) - r_g = g(x) - a/2 \geq a - a/2 = a/2 > 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Siten $h \in A^c$, joten $B(g, r_g) \subset A_c$. Erityisesti siis A^c on avoin joukko, joten A on suljettu joukko ja siten $A = \overline{A}$. $\square$

Arvostelusta.

- $A = \overline{A}$ jos ja vain jos A on suljettu +2p
- joukon A^c muodostaminen oikein +1p
- todistus joukon A^c avoimuudelle +3p