Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Korvaava ensimmäinen välikoe
28.10.2013
Koeaika 2 tuntia

- Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään neljään**. Mikäli vastaat useampaan kuin neljään kysymykseen, arvostelussa otetaan huomioon vain neljä heikoiten mennyttä tehtävää ja kokonaispistemäärästä vähennetään yksi tai kaksi pistettä (riippuen ylimääräisinä tehtyjen tehtävien määrästä).
- Tehtävissä saa käyttää kurssilla käsiteltyjä lauseita (ellei tehtävässä juurikin pyydetä todistamaan jotakin näistä lauseista) ja kurssin Analyysi I tuloksia.
- Huomaa, että tehtäviä löytyy paperin kummaltakin puolelta.

---

1. Olkoon (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f \colon X \to Y$ kuvaus.
   a) Määrittele, mitä tarkoittaa kuvauksen f jatkuvuus pisteessä $a \in X$.
   b) Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio $M \geq 0$, että $d'(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$ kaikilla pisteillä $x, y \in X$. Osoita määritelmästä lähtien, että kuvaus f on jatkuva.

2. Tarkastellaan kuvausta $d \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}.$$
   Mitkä metriikan ehdot kuvaus d toteuttaa? Onko se metriikka?

3. Varustetaan taso $\mathbb{R}^2$ euklidisella metriikalla d. Osoita, että joukko $]0, \infty[\times]{-\infty}, 3[$ on avoin avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d)$.

4. Olkoon X mikä tahansa joukko.
   a) Miten määritellään joukon X $\{0, 1\}$-metriikka? *2p*
   b) Osoita, että $\{0, 1\}$-metriikan suhteen joukainen joukon X osajoukko on suljettu. *4p*

5. Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = (x^2, e^{y^2} + 5, 4).$$

a) Osoita, että kuvaus f on jatkuva.

b) Kuvaus on *avoin kuvaus*, jos se kuvaa jokaisen avoimen joukon avoimeksi joukoksi. Osoita, että kuvaus f ei ole avoin kuvaus.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ osajoukkoja.

a) Osoita, että $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Näytä vastaesimerkillä, että edellisessä kohdassa sisältyvyyttä $\subset$ ei voi korvata yhtäsuuruudella $=$.