Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Ensimmäinen välikoe
17.10.2013
Koeaika 2 tuntia.

- Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään neljään**. Mikäli vastaat useampaan kuin neljään kysymykseen, arvostelussa otetaan huomioon vain neljä heikoiten mennyttä tehtävää ja kokonaispistemäärästä vähennetään yksi tai kaksi pistettä (riippuen ylimääräisinä tehtyjen tehtävien määrästä).
- Tehtävissä saa käyttää kurssilla käsiteltyjä lauseita (ellei tehtävässä juurikin pyydetä todistamaan jotakin näistä lauseista) ja kurssin Analyysi I tuloksia.
- Huomaa, että tehtäviä löytyy paperin kummaltakin puolelta.

---

1. Mitkä metriikan ehdot kuvaus $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|,$$
toteuttaa? Onko se metriikka? Perustele!

2. a) Määrittele käsitteet avoin joukko ja suljettu joukko.
   b) Osoita, että avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

3. Olkoon (X, d) epätyhjä metrinen avaruus ja $a \in X$ kiinnitetty piste.
   a) Osoita, että kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$, on 1-Lipschitz.
   b) Osoita, että joukko $A = \{x \in X : 2 < d(x, a) < 5\}$ on avoin joukko.

4. a) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $a \in Y$ kiinnitetty piste. Osoita, että kuvaus $f\colon X \to Y$, $f(x) = a$, on jatkuva.
   b) Olkoon $d_{\{0,1\}}$ joukon $\mathbb{R}$ $\{0, 1\}$-metriikka ja d_e joukon $\mathbb{R}$ euklidinen metriikka. Osoita, että kuvaus $f\colon (\mathbb{R}, d_e) \to (\mathbb{R}, d_{\{0,1\}})$, $f(x) = x$, ei ole jatkuva.

5. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ehdolla

$$f(x,y) = \left(xy^4 + 5, e^{e^x}, y+4\right).$$

a) Osoita, että f on jatkuva kuvaus.

b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa osajoukko. Osoita, että joukko

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^4 \in [2,3], e^{e^x} \in [1,2], y \in [4,8]\} \cap A$$

on suljettu joukossa A euklidisen metriikan suhteen. Saat pitää tunnettun tietoa, että joukko $[7,8] \times [1,2] \times [8,12]$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^3$ euklidisen metriikan suhteen.

6. Varustetaan avaruus $C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ max-metriikalla d:

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Osoita, että joukko $A = \{f \in C[0,1] \mid f(x) \leq 0 \text{ jollakin } x \in [0,1]\}$ on oma sulkeumansa avaruudessa $C[0,1]$.