Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Suurpiirteisiä ratkaisuja kertaustehtäviin (periodi I)
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. a) Katso kirjan sivun 15 alalaita ja Lause 1.5.
   b) Katso kirjan Lause 2.2.
   c) Yhdistämällä edelliset kohdat näemme, että kaava $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle}$ määrittelee metriikan d joukkoon E, kun $\|\cdot\|$ on sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ määrittelemä normi.

2. Koska $\|\cdot\|_\alpha$ ja $\|\cdot\|_\beta$ ovat normeja, ne toteuttavat ehdot (N1)-(N3). Niiden nojalla on voimassa

   (N1) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_\gamma = \|\bar{x} + \bar{y}\|_\alpha + \|\bar{x} + \bar{y}\|_\beta \leq \|\bar{x}\|_\alpha + \|\bar{y}\|_\alpha + \|\bar{x}\|_\beta + \|\bar{y}\|_\beta = \|\bar{x}\|_\gamma + \|\bar{y}\|_\gamma$;

   (N2) $\|c\bar{x}\|_\gamma = \|c\bar{x}\|_\alpha + \|c\bar{x}\|_\beta = |c|\|\bar{x}\|_\alpha + |c|\|\bar{x}\|_\beta = |c|\|\bar{x}\|_\gamma$;

   (N3) $\|\bar{x}\|_\gamma = 0 \implies \|\bar{x}\|_\alpha + \|\bar{x}\|_\beta = 0 \implies \|\bar{x}\|_\alpha = \|\bar{x}\|_\beta = 0 \implies \bar{x} = \bar{0}$.

3. Katso Harjoitustehtävien 2 tehtävä 3 (ja valitse $n = 2$).

4. (a) Kyseessä on (yksiulotteinen) euklidinen metriikka, joka saadaan muodostettua pistetulon tai euklidisen normin kautta (tehtävän 1 tyylisesti), katso kirjan kohta 2.3.1. Ehdot on myös yksinkertaista osoittaa suoraan käyttäen itseisarvon ominaisuuksia ja reaalilukujen kolmioepäyhtälöä.
   (b) Esimerkiksi $d_2(-1, 1) = |(-1)^2 - 1^2| = 0$ vaikka $-1 \neq 1$, joten kuvaus d_2 ei täytä metriikan ehtoa (M3).

5. Koska d_1 ja d_2 ovat metriikoita, ne toteuttavat ehdot (M1)-(M3). Niiden nojalla on voimassa

   (M1) $(d_1 + d_2)(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y) + d_2(x, z) + d(z, y) = (d_1 + d_2)(x, z) + (d_1 + d_2)(z, y)$;

   (M2) $(d_1 + d_2)(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) = d_1(y, x) + d_2(y, x) = (d_1 + d_2)(y, x)$;

   (M3) $(d_1 + d_2)(x, y) = 0 \iff d_1(x, y) + d_2(x, y) = 0 \iff d_1(x, y) = d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

6. Väite ei voi olla voimassa missään (epätyhjässä) metrisessä avaruudessa, sillä $a \in B(a, r)$ ja $a \notin S(a, r)$ kaikilla $a \in X$ ja kaikilla $r > 0$.

7. a) $B(5, 1) =]4, 6[$, $\overline{B}(5, 1) = [4, 6]$, $S(5, 1) = \{4, 6\}$

b) Katso Harjoitustehtävien 3 tehtävä 1. (ii): $B((1,2),1)$ on avoin (ts. reunaton) $(1,2)$-keskeinen vinoneliö, jonka kärjet ovat pisteissä $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,2)$ ja $(1,1)$; $\overline{B}((1,2),1)$ on vastaava suljettu (ts. reunallinen) vinoneliö ja $S((1,2),1)$ on tämän vinoneliön reuna.

c) $\{0,1\}$-metriikan ja kuulien ja pallojen määritelmien nojalla $B(\bar{0},1) = \{\bar{0}\}$, $\overline{B}(\bar{0},1) = \mathbb{R}^7$ ja $S(0,1) = \mathbb{R}^7 \setminus \{\bar{0}\}$.

8. Kuvaus d_p on positiivinen ja se toteuttaa ehdot (M1) ja (M2):

(M1) $d_p(x,y) = d(x,p) + d(p,y) \leq d(x,p) + d(p,z) + d(z,p) + d(p,y) = d_p(x,z) + d_p(z,y)$,

(M2) $d_p(x,y) = d(x,p) + d(p,y) = d(y,p) + d(p,x) = d_p(y,x)$.

Se ei kuitenkaan toteuta ehtoa (M3): jos $X = \mathbb{R}$, d on euklidinen metriikka ja $p = 2$, niin $d_p(1,1) = d(1,2) + d(2,1) = 2 \neq 0$.

9. Katso kirjan kohdat 3.1 ja 6.1. Esimerkiksi $]0,1[$, $[0,1]$ ja $[0,1[$ ovat halutunlaiset joukot euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$.

10. Katso kirjan kohta 6.5 ja Lauseen 6.8 kohta (6).

11. a) Jokaisella $x \in X \setminus \{x_1\}$ valitaan $r_x = \frac{1}{2}d(x,x_1)$. Tällöin $B(x,r_x) \subset X \setminus \{x_1\}$, joten joukko $X \setminus \{x_1\}$ on avoin.

b) Jokaisella $x \in X \setminus A$ valitaan $r_x = \frac{1}{2}\min_{a \in A} d(x,a) > 0$ (minimi on olemassa ja se on positiivinen, koska joukko A on äärellinen). Tällöin $B(x,r_x) \subset X \setminus A$, joten joukko $X \setminus A$ on avoin.

12. Katso ylimääräisen materiaalin "Avoimista joukoista ja avoimuuden määrittämisestä" Esimerkki 4, tehtävässä toimitaan vastaavasti.

13. a) Esimerkiksi $]0,1[\,\cap\,]1,2[\,\cap \ldots = \emptyset$.

b) Esimerkiksi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-1/n, 1/n[= \{0\}$.

14. a) Esimerkiksi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0 - 1/n, 1 - 1/n] =]0,1[$.

b) Esimerkiksi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/n] = [0,1[$.

15. Huomataan, että $D^c = \{f \in C[0,1] \mid f(t) < 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1]\}$. Joukko D^c voidaan osoittaa avoimeksi samaan henkeen kuin Harjoitustehtävien 4 tehtävässä 3. Koska D^c on avoin, joukko D on suljettu.

16. (i) A on avoin mutta ei-suljettu, $\overline{A} = [0,1]$.

(ii) B on suljettu mutta ei-avoin.

(iii) C ei ole avoin eikä suljettu, $\overline{C} = [0,1]$.

(iv) D on avoin mutta ei-suljettu, $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in [0,1], |y| \leq |x|\}$. Avoimuuden voi osoittaa käyttämällä Lausetta 4.8 ja sulkeuman määrittämisessä kuvan piirtäminen helpottaa tilanteen hahmottamista.

(v) E on avoin (itse asiassa $E = B((0,0),5))$ mutta ei-suljettu, $\overline{E} = \overline{B}((0,0),5)$.

(vi) $G = \emptyset^c = \mathbb{R}$ on avoin ja suljettu.

17. Katso kirjan kohta 4.1.

18. Katso kirjan kohta 4.4 ja Lause 4.5.

19. Koska $|f(x) - f(y)| = |1-1| = 0 = 0 \cdot d(x,y)$, niin kuvaus f on 0-Lipschitz-kuvauksena jatkuva.

20. (i) Määritelmästä lähtien: Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{1}{2}$. Tällöin kun $d'(x,a) < \delta$, niin $\{0,1\}$-metriikan määritelmän nojalla $x = a$. Tällöin erityisesti $d(f(x), f(a)) = d(x,a) = 0 < \varepsilon$. Siten kuvaus f on jatkuva pisteessä a, joten pisteen a mielivaltaisuuden nojalla kuvaus f on jatkuva.

    Toinen tapa: Huomataan, että avaruuden $(\mathbb{R}, d')$ jokainen osajoukko on avoin (katso Harjoitustehtävien 3 tehtävän 6(ii) ratkaisu). Siten jokaisen avaruuden $(\mathbb{R}, d)$ avoimen joukon alkukuva on avoin, joten jatkuvuus seuraa Lauseesta 4.8.

    (ii) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Huomataan, että jos $\varepsilon \in]0,1[$, niin jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ on voimassa $d'(g(x), g(a)) = d'(x,a) = 1 > \varepsilon$. Siten kuvaus g ei ole jatkuva yhdessäkään pisteessä $a \in \mathbb{R}$.

21. Tulos seuraa Lauseesta 2.10.

22. Edellisen tehtävän nojalla kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,x_0)$, on jatkuva, joten joukko

$$\begin{aligned}
\{x \in X : 3 < d(x,x_0) < 5\} &= \{x \in X : 3 < f(x) < 5\} \\
&= \{x \in X : 3 < f(x)\} \cap \{x \in X : f(x) < 5\} \\
&= f^{-1}]3,\infty[\cap f^{-1}]{-\infty},5[
\end{aligned}$$

on Lauseiden 3.5 ja 4.8 nojalla avoin.

23. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^8 - y^8| \\
&= |x^4 - y^4||x^4 + y^4| \\
&= |x^2 - y^2||x^2 + y^2||x^4 - y^4| \\
&= |x - y||x + y||x^2 + y^2||x^4 + y^4|,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq (|x|+|y|)(x^2+y^2)(x^4+y^4)|x-y| \\ &\leq (10+10)(10^2+10^2)(10^4+10^4)|x-y| \\ &= 80000000|x-y|.\end{aligned}$$

Siis kuvaus f on 80000000-Lipschitz.

24. Katso kirjan kohta 3.12. Jos X on diskreetti, niin määritelmästä seuraa, että sen jokainen yksiö on avoin. Siten koska $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ jokaisella joukolla $A \subset X$, niin jokainen joukko $A \subset X$ on avoin. Toistaalta tällöin myös jokaisen joukon komplementti on avoin, joten jokainen joukko on myös suljettu.

25. Koska edellisen kohdan nojalla diskreetin metrisen avaruuden jokainen osajoukko on avoin, niin jokaisen joukon $B \subset Y$ alkukuva jokaisessa kuvauksessa on avoin. Siten Lauseen 4.8 nojalla jokainen kuvaus $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ on jatkuva.

26. a) Harjoitustehtävien 4 tehtävässä 4 osoitettiin, että joukko A on diskreetti, joten se ei sisällä yhtään kasautumispistettään. Puolestaan samassa tehtävässä osoitettiin, että 0 on joukon A kasautumispiste. Tarkastelemalla tapaukset $x < 0$, $x > 1$ ja $x \in \,]0,1] \setminus A$ erikseen huomataan, että 0 on joukon A ainut kasautumispiste.
    b) Harjoitustehtävien 4 tehtävän 4 nojalla joukko A on diskreetti, joten edelliskohdan ja Lauseen 6.21 nojalla $\overline{A} = A \cup \{0\}$.
    c) Harjoitustehtävien 4 tehtävän 4 nojalla joukko A on diskreetti, joten joukon A erakkopisteet ovat täsmälleen joukon A omat pisteet.

27. a) Jokaisella $r \in \,]0,1]$ pätee $(-r/2,0) \in B((0,0),r) \not\subset A$ ja $(1-r/2,0) \in B((1,0),r) \not\subset A^c$, joten joukko A ei ole avoin eikä suljettu.
    b) Koska $A = [0,2] \times [0,5] \cap \,]-1,1[\times]-1,1[$ ja $]-1,1[\times]-1,1[$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$, niin joukko A on avoin joukossa $[0,2] \times [0,5]$ Lauseen 7.2 nojalla.
    c) Koska $A = [-2,1[\times[-2,1[\cap[0,1] \times [0,1]$ ja joukko $[0,1] \times [0,1]$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$, niin joukko A on suljettu joukossa $[-2,1[\times[-2,1[$ Lauseen 7.7 nojalla.
    d) Koska $\overline{A} = [0,1]^2$, niin Lauseen 7.6. nojalla $\mathrm{cl}_{[0,1]\times[0,1[}A = [0,1] \times [0,1[\cap\overline{A} = [0,1] \times [0,1[$.

28. a) $\mathrm{pr}_1\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$
    b) $\mathrm{pr}_1\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$
    c) $\mathrm{pr}_3\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x|\} = [0,\infty[$
    d) $\mathrm{pr}_2\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-7,5], y = x^2\} = [0,49]$