Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Suurpiirteisiä ratkaisuja kertaustehtäviin (periodi II)[1]
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. a)
   - $\mathrm{int}B(\bar{0},1) =]-1,1[$
   - $\mathrm{ext}B(\bar{0},1) = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$
   - $\partial B(\bar{0},1) = \{-1,1\}$

   b) Vastaavalla tarkastelulla kuin Harjoitusten 3 tehtävän 1.(ii) ratkaisussa näemme, että
   - $\mathrm{int}B(\bar{0},1) =]-1,1[^2$
   - $\mathrm{ext}B(\bar{0},1) = \mathbb{R}^2 \setminus [-1,1]^2$
   - $\partial B(\bar{0},1) = \{-1,1\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{-1,1\}$

   c)
   - $\mathrm{int}B(\bar{0},1) = \{\bar{0}\}$
   - $\mathrm{ext}B(\bar{0},1) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$
   - $\partial B(\bar{0},1) = \emptyset$

2. a) Määritelmän mukaan piste $a \in A$ on joukon A sisäpiste, jos on olemassa jokin pisteen a ympäristö U_a, jolle on voimassa $U_a \subset A$. Siten väite seuraa Lauseesta 3.10 (tai suoraan määritelmistä).

   b) Koska joukot $\mathrm{int}A$ ja ∂A ovat erilliset ja aina $A \subset \mathrm{int}A \cup \partial A$, niin edelliskohdan nojalla: A on avoin $\iff A = \mathrm{int}A \iff \partial A \cap A = \emptyset$.

   c) Koska $\partial A^c = \partial A$, niin edelliskohdan nojalla: A on suljettu $\iff$ A^c on avoin $\iff$ $A^c \cap \partial A^c = \emptyset \iff A^c \cap \partial A = \emptyset \iff \partial A \subset A$.

3. a) Haluttu homeomorfismi on $f\colon [2,7] \to [0,1] \times \{10\}$, $f(x) = ((x-2)/5, 10)$, ja sen käänteiskuvaus on $g\colon [0,1] \times \{10\} \to [2,7]$, $g(x,y) = 5x+2$.

   b) Haluttu homeomorfismi on $f\colon B(\bar{0},1) \to B((200,300),100)$, $f(x,y) = (100x, 100y) + (200,300)$, ja sen käänteiskuvaus on $g\colon B((200,300),100) \to B(\bar{0},1)$, $g(x,y) = ((x-200)/100, (y-300)/100)$.

4. Haluttu homeomorfismi on yksinkertaisesti $\mathrm{pr}_1\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$, ja sen käänteiskuvaus on $f\colon \mathbb{R} \to \Gamma$, $g(x) = (x, f(x))$.

5. $\supseteq$ Olkoon $y \in f[\partial A]$ ja V jokin y:n ympäristö. Olkoon $x \in \partial A$ se piste, jolla $f(x) = y$. Koska f on jatkuva, niin $U := f^{-1}V$ on x:n ympäristö. Siten on voimassa $U \cap A \neq \emptyset$ ja $U \cap A^c \neq \emptyset$. Koska f on bijektio, niin $f[A^c] = (fA)^c$ ja $f[U \cap A] = V \cap fA \neq \emptyset$ ja $f[U \cap A^c] = V \cap (fA)^c \neq \emptyset$. Siten $y \in \partial fA$.

[1] Tehtävää 27 korjattu ja vastausta muutettu 7.12.2013.

$\subseteq$ Olkoon $y \in \partial fA$ ja $x \in X$ se piste, jolle $f(x) = y$. Olkoon U pisteen x ympäristö. Nyt koska f on homeomorfismi, niin fU on pisteen y ympäristö. Koska f on bijektio, niin $fU \cap fA = f[U \cap A] \neq \emptyset$ ja $fU \cap (fA)^c = f[U \cap A^c] \neq \emptyset$ ja erityisesti $f^{-1}[f[U \cap A]] = U \cap A \neq \emptyset$ ja $f^{-1}[f[U \cap A^c]] = U \cap A^c \neq \emptyset$. Siis $x \in \partial A$ ja siten $y \in f[\partial A]$.

6. a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Huomataan, että

$$d(x_n, 3) = \left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

jos $n > 1/\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Siten $x_n \to 3$.

b) Huomataan, että $x_n \neq x_m$ aina kun $n \neq m$. Siten

$$d(x_n, x_m) = 1$$

kaikilla $n \neq m$. Erityisesti jono (x_n) ei ole Cauchy, joten se ei voi supeta Lauseen 12.3 nojalla.

7. Katso Lause 11.4.

8. Huomataan, että (x_n), $x_n = 2\pi - 1/n$, on joukon $[0, 2\pi[$ jono, joka suppenee avaruudessa $\mathbb{R}$ kohti pistettä 2π. Siten $2\pi \in \overline{[0, 2\pi[}$, mutta koska $2\pi \notin [0, 2\pi[$, niin $[0, 2\pi[\neq \overline{[0, 2\pi[}$. Erityisesti joukko $[0, 2\pi[$ ei ole suljettu.

9. a) Jonolla ei ole kasautumisarvoja.

b) Koska kosini on 2π-periodinen, kasautumisarvot ovat 1, $1/\sqrt{2}$, 0, $-1/\sqrt{2}$ ja -1.

c) Ainut kasautumisarvo on $(0, 1)$.

d) Jonolla ei ole kasautumisarvoja.

e) Koska nyt jokainen avaruuden $C[0, 1]$ alkio on erakkopiste ja $f_n \neq f_m$ kun $n \neq m$, niin jonolla ei ole yhtään kasautumisarvoa.

10. a) Väite seuraa Lauseista 11.17 ja 11.18: jos jono (x_n) suppenee, sen jokainen osajono suppenee kohti samaa pistettä.

b) Esimerkiksi euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ jonolla (x_n),

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{jos } n \text{ on pariton} \\ 1, & \text{muulloin} \end{cases},$$

on täsmälleen yksi kasautumisarvo (eli luku 1), mutta jono ei suppene.

11. Ei voi. Jos (y_n) on jonon (x_n) suppeneva osajono, niin jono $(y_n)_{n=k}^{\infty}$ on myös jonon (x_n) suppeneva osajono jokaisella $k \in \mathbb{N}$.

12. Katso Lause 11.17.

13. Katso Lause 12.5.

14. Tehtävän 2 nojalla joukko A on suljettu jos ja vain jos $\partial A \subset A$. Puolestaan Lauseiden 12.5 ja 12.6 nojalla joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on täydellinen jos ja vain jos A on suljettu.

15. Esimerkiksi jono $(1/n)$ joukossa $]0,1]$.

16. Esimerkiksi funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Katso kirjan kohta 12.13.1.

17. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $C := \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$. Oletuksen nojalla $C < \infty$. Jos $C = 0$, funktio on vakio, jolloin väite on selvä. Voimme siis olettaa, että $C > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \varepsilon/C$. Nyt kun $|x-y| < \delta$, $x < y$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in]x,y[$, että

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq C|x-y| < C\delta_\varepsilon = \varepsilon.$$

Koska δ_ε ei riipu pisteistä x ja y, niin kuvaus f on tasaisesti jatkuva.

18. Harjoitusten 10 tehtävässä 3.b) osoitettiin, että funktio $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä. Kuitenkin kaikilla $x \in]0,1[$ on voimassa $f'(x) = (1/3)x^{-2/3} \to \infty$, kun $x \to 0$.

19. Käytetään Lauseita 12.5 ja 12.6 täydellisyyden tutkimiseen ja Lausetta 13.14 kompaktisuuden tutkimiseen.

    (a) A on suljettu, joten se on täydellinen, mutta se ei ole rajoitettu, joten se ei ole kompakti.

    (b) B on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti ja täydellinen.

    (c) Kuvaus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = |y^3|$, on jatkuva kuvaus ja joukko $]-\infty, 4]$ on suljettu joukko, joten Lauseen 6.13 nojalla $C = f^{-1}]-\infty,4]$ on suljettu ja siten täydellinen. Se ei kuitenkaan ole rajoitettu, sillä $(0,0,z) \in C$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$ ja $d((0,0,0),(0,0,z)) = |z| \to \infty$ kun $z \to \infty$, joten $d(C) = \infty$.

    (d) Huomataan, että $(0,0,0) \in D^c$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $(\varepsilon/2)^4 > 0$. Siten $(0,0,\varepsilon/2) \in B((0,0,0),\varepsilon) \cap D$, joten joukko D^c ei ole avoin. Erityisesti siis joukko D ei ole suljettu, joten se ei ole täydellinen eikä kompakti.

20. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kompakteja. Voidaan olettaa, että $A_i \neq \emptyset$ jollakin $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Olkoon (x_n) joukon $\bigcup_{i=1}^k$ jono. Koska joukkoja A_i on äärellinen määrä, niin $x_n \in A_j$ jollakin $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ ja äärettömän monella $n \in \mathbb{N}$. Olkoon (y_n) näiden alkioiden muodostama osajono. Koska (y_n) on kompaktin joukon A_j jono, niin on olemassa jonon (y_n) suppeneva osajono (z_n). Koska (z_n) on myös jonon (x_n) osajono, jonolla (x_n) on

suppeneva osajono. Erityisesti joukko $\bigcup_{i=1}^k A_i$ on kompakti.

21. Joukko $[-n,n]$ on kompakti jokaisella $n \in \mathbb{N}$, mutta joukko $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n] = \mathbb{R}$ ei ole kompakti.

22. Helpoiten tämän saa osoitettua valitsemalla kaksi erillistä konveksia joukkoa, jolloin niiden yhdiste ei ole edes yhtenäinen.

    Yhdiste ei kuitenkaan ole välttämättä konveksi edes siinä tapauksessa, että joukkojen leikkaus on epätyhjä. Olkoon $A = [0,1]^2$ ja $B = [1,2]^2$. Nyt kaikilla $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in [0,1]^2$ ja kaikilla $t \in [0,1]$ on voimassa

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1-t)a_1 + tb_1 \leq (1-t) + t = 1 \\ 0 &\leq (1-t)a_2 + tb_2 \leq (1-t) + t = 1, \end{aligned}$$

    joten joukko $[0,1]^2$ on konveksi. Vastaavasti joukko $[1,2]^2$ on konveksi. Nyt $[0,1]^2 \cap [1,2]^2 \neq \emptyset$, mutta pisteille $(1,0),(2,1) \in [0,1]^2 \cup [1,2]^2$ on voimassa

$$\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2, \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \notin [0,1]^2 \cup [1,2]^2,$$

    joten joukko $[0,1]^2 \cup [1,2]^2$ ei ole konveksi.

23. Olkoot A ja B murtoviivayhtenäisiä ja $A\cap B \neq \emptyset$. Olkoon $a \in A\cap B$ ja olkoot $x,y \in A\cup B$. Nyt koska $x \in A$ tai $x \in B$, niin piste x voidaan yhdistää pisteeseen a äärellisellä murtoviivalla joukossa $A \cup B$. Puolestaan koska $y \in A$ tai $y \in B$, niin piste a voidaan yhdistää pisteeseen y äärellisellä murtoviivalla joukossa $A\cup B$. Yhdistämällä nämä kaksi murtoviivaa saadaan pisteet x ja y yhdistävä äärellinen murtoviiva joukossa $A \cup B$.

24. Olkoot $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ tai } y \text{ on irrationaalinen}\}$. Tarkastellaan nyt eri tapauksia.

Tapaus 1: x_1 ja x_2 ovat irrationaalisia.

- Jos $x_1 = x_2$, niin yhdistetään pisteet $(x_1, y_1$ ja (x_2,y_2) pystysuoralla janalla $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x_1,(1-t)y_1 + ty_2)$. Tällöin $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ kaikilla $t \in [0,1]$, koska $x_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- Jos $x_1 \neq x_2$, niin yhdistetään pisteet (x_1,y_1) ja (x_1,π) janalla $\alpha_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x_1,(1-t)y_1 + t\pi)$, pisteet (x_1,π) ja (x_2,π) janalla $\alpha_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2(t) = ((1-t)x_1 + tx_2, \pi)$, ja pisteet (x_2,π) ja (x_2,y_2) janalla $\alpha_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_3(t) = (x_2,(1-t)\pi + ty_2)$. Tällöin $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja $i \in \{1,2,3\}$, sillä $x_1,\pi,x_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Siten pisteet (x_1,y_1) ja (x_2,y_2) voidaan yhdistää murtoviivalla joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Tapaus 2: y_1 ja y_2 ovat irrationaalisia. Tämä tapaus todistetaan samoin kuin Tapaus 1.

Tapaus 3: x_1 ja y_2 ovat irrationaalisia. Yhdistetään nyt pisteet (x_1,y_1) ja (x_1,y_2) janalla $\alpha_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_1(t) = (x_1,(1-t)y_1 + ty_2)$, ja pisteet (x_1,y_2) ja (x_2,y_2) janalla $\alpha_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2(t) = ((1-t)x_1 + tx_2, y_2)$. Tällöin $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja $i \in \{1,2\}$, koska $x_1,y_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Tapaus 4: y_1 ja x_2 ovat irrationaalisia. Tämä tapaus todistetaan samoin kuin Tapaus 3.

Siten joukko $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ on murtoviivayhtenäinen, joten Lauseen 14.27 nojalla se on yhtenäinen.

25. (a) Jos olisi olemassa homeomorfismi $f\colon [0,1] \to]0,1[$, niin myös joukot $]0,1]$ ja $]0,1[\setminus\{f(0)\}$ olisivat homeomorfiset. Tämä on kuitenkin mahdotonta Seurauksen 14.17 nojalla, koska Lauseen 14.15 nojalla $]0,1]$ on yhtenäinen ja $]0,1[\setminus\{f(0)\}$ on epäyhtenäinen.
    (b) Katso Harjoitustehtävien 11 tehtävä 5.
    (c) Tämä osoitetaan samoin kuin kohta a).
    (d) Muodostetaan kuvaus $f\colon [0,1[\to]0,1]$, $f(x) = 1 - x$. Tällöin f on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus $g\colon]0,1] \to [0,1[$, $g(x) = 1 - x$, on jatkuva, joten f on homeomorfismi.

26. Katso kirjan kohta 3.13.

27. X:n erilaisia topologioita on yhteensä 4:

    - $\{\emptyset, X\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, X\}$
    - $\{\emptyset, \{b\}, X\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

    Yksiön $\{a\}$ sisältäviä Y:n topologioita on yhteensä 12:

    - $\{\emptyset, \{a\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{a,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, Y\}$
    - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, Y\}$

28. (a) Kannan $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ virittämä topologia on potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
    (b) Esimerkiksi Lauseen 3.7 nojalla kannan $\mathcal{B} = \{]a,b[\colon a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ virittämä topologia on ns. euklidinen topologia, eli

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ on avoin euklidisen metriikan suhteen}\}.$$

29. Annettu kokoelma ei ole topologia, koska yhdiste $]0,1[^2 \cup]1,2[^2$ ei kuulu kokoelmaan.

30. Huomataan, että jos $x \in [0,1]$, niin $0 \le 1/7(x^3+1) \le 1$, joten voimme määritellä kuvauksen $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 1/7(x^3+1)$. Lisäksi

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{7}|x^3 - y^3| = \frac{1}{7}|x^2 + xy + y^2||x-y| \le \frac{3}{7}|x-y|,$$

joten kuvaus f on kontraktio täydelliseltä avaruudelta $[0,1]$ itselleen. Siten Banachin kiintopistelauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen alkio $a \in [0,1]$, jolle on voimassa $f(a) = a$. Toisin sanoen on olemassa täsmälleen yksi piste $a \in [0,1]$, jolle on voimassa

$$f(a) = a \iff \frac{1}{7}(a^3+1) = a \iff a^3 - 7a + 1 = 0,$$

eli annetulla yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri välillä $[0,1]$. Banachin kiintopistelauseen nojalla esimerkiksi jono $f(0), f(f(0)), f(f(f(0))), \ldots$ suppenee kohti tätä juurta.

31. Huomataan, että kun $x, y \in [0,1]$, niin väliarvolauseen nojalla

$$|\cos x - \cos y| \le \sin 1 |x-y|,$$

joten koska $\sin 1 < 1$, niin kosini on välillä $[0,1]$ kontraktio. Siten koska $[0,1]$ on täydellinen, niin Banachin kiintopistelauseen nojalla kosinilla on välillä $[0,1]$ täsmälleen yksi kiintopiste ja jokaisella $x \in [0,1]$ pätee, että jono $\cos x, \cos(\cos x), \cos(\cos(\cos x)), \ldots$ suppenee kohti tätä kiintopistettä.