Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Kertaustehtäviä toiseen kurssikokeeseen[1]
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

---

1. Määritä joukon $B(\bar{0},1)$ sisä-, ulko- ja reunapisteet avaruudessa

   a) $(\mathbb{R},d)$ kun d on euklidinen metriikka;

   b) $(\mathbb{R}^2,d)$ kun d määritellään yhtälöllä $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$;

   c) $(\mathbb{R}^3,d)$, kun d on $\{0,1\}$-metriikka.

2. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$.

   a) Osoita, että joukko A on avoin jos ja vain jos $A = \mathrm{int}A$.

   b) Päättele edelliskohdan avulla, että joukko A on avoin jos ja vain jos $A \cap \partial A = \emptyset$.

   c) Päättele edelliskohdan avulla, että joukko A on suljettu jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

3. a) Osoita, että joukot $[2,7] \subset \mathbb{R}$ ja $[0,1] \times \{10\} \subset \mathbb{R}^2$ ovat homeomorfiset.

   b) Osoita, että joukot $B(\bar{0},1) \subset \mathbb{R}^2$ ja $B((200,300),100) \subset \mathbb{R}^2$ ovat homeomorfiset.

4. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f *kuvaaja* $\Gamma := \{(x,f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ on homeomorfinen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ kanssa.

5. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia, $f\colon X \to Y$ homeomorfismi ja $A \subset X$. Osoita, että $\partial fA = f[\partial A]$ (eli osoita, että kuvan reuna on reunan kuva).

6. Tarkastellaan jonoa (x_n), $x_n = 3 + 1/n$, joukossa $\mathbb{R}$. Osoita, että jono (x_n)

   a) suppenee, jos joukko $\mathbb{R}$ varustetaan euklidisella metriikalla;

   b) ei suppene, jos joukko $\mathbb{R}$ varustetaan $\{0,1\}$-metriikalla.

7. Osoita, että metrisen avaruuden jono voi supeta enintään yhtä pistettä kohti.

8. Osoita Lauseen 11.6 avulla, että joukko $[0,2\pi[$ ei ole suljettu.

[1] Pari typoa korjattu ja tehtävää 27 muutettu 7.12.2013.

9. Määritä seuraavien jonojen kasautumisarvot.

   a) $0, 1, 2, \ldots$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$
   b) $(\cos(n\pi/4))$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$
   c) $((3/n, 1))$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$
   d) $((3/n, n))$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$
   e) (f_n) joukossa $C[0,1]$, kun $f_n(x) = x^n$ ja joukko $C[0,1]$ varustetaan $\{0,1\}$-metriikalla.

10. a) Osoita, että jos jono (x_n) suppenee, sillä on täsmälleen yksi kasautumisarvo.
    b) Osoita vastaesimerkillä, että vaikka jonolla olisi täsmälleen yksi kasautumisarvo, se ei silti välttämättä suppene.

11. Voiko missään metrisessä avaruudessa olla jonoa, jolla on täsmälleen kaksi suppenevaa osajonoa?

12. Osoita, että jos jono suppenee kohti pistettä a, sen jokainen osajono suppenee kohti pistettä a.

13. Käyttäen tietoa, että euklidinen avaruus $\mathbb{R}$ on täydellinen, osoita, että euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen.

14. Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on täydellinen jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

15. Anna esimerkki Cauchyn jonosta, joka ei suppene.

16. Anna esimerkki funktiosta, joka on jossakin joukossa jatkuva muttei tasaisesti jatkuva.

17. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla on rajoitettu derivaatta avoimella välillä $]a, b[$. Osoita väliarvolauseen avulla, että funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $]a, b[$.

18. Osoita, että on olemassa välillä $]0, 1[$ tasaisesti jatkuva funktio, jonka derivaatta ei ole rajoitettu.

19. Mitkä seuraavista joukoista ovat täydellisiä? Mitkä niistä ovat kompakteja?

   a) $A :=]-\infty, 30] \subset \mathbb{R}$
   b) $B := [0,3] \times [4,200] \subset \mathbb{R}^2$
   c) $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y^3| \leq 4\}$
   d) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 < z^4\}$

20. Osoita, että kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti.

21. Osoita vastaesimerkillä, että komapktien joukkojen mielivaltainen yhdiste ei välttämättä ole kompakti.

22. Osoita, että kahden konveksin joukon yhdiste ei ole välttämättä konveksi.

23. Osoita, että jos joukot A ja B ovat murtoviivayhtenäisiä ja $A \cap B \neq \emptyset$, niin $A \cup B$ on murtoviivayhtenäinen.

24. Osoita, että joukko $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ on yhtenäinen (vihje: murtoviivayhtenäisyys).

25. Osoita, että joukot

   a) $]0,1[$ ja $[0,1]$ eivät ole homeomorfiset;
   b) $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfiset;
   c) $\mathbb{R}$ ja $[0,1]$ eivät ole homeomorfiset;
   d) $[0,1[$ ja $]0,1]$ ovat homeomorfiset.

26. Määrittele topologinen avaruus.

27. Olkoon $X = \{a,b\}$ ja $Y = \{a,b,c\}$. Montako erilaista X:n topologiaa on olemassa? Montako erilaista yksiön $\{a\}$ sisältävää Y:n topologiaa on olemassa?

28. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{B}$ on topologian τ *kanta*, jos

   1) $\mathcal{B} \subset \tau$;
   2) jokainen τ:n alkio voidaan lausua yhdisteenä $\mathcal{B}$:n alkioista.

   Jos $\mathcal{B}$ on τ:n kanta, sanomme, että $\mathcal{B}$ *virittää* topologian τ.

   Minkä $\mathbb{R}$:n (tutun) topologian seuraava kanta virittää?

   a) $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$
   b) $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

   (Minkälainen kokoelma siis muodostuu, kun muodostetaan kaikki ne joukot, jotka voidaan lausua $\mathcal{B}$:n alkioiden yhdisteinä? Topologia tarkoittaa avointen joukkojen kokoelmaa. Onko olemassa jotakin metriikkaa, joka määrää samat avoimet joukot?)

29. Onko kokoelma $\{\mathbb{R}^2, \emptyset,]0,1[^2,]1,2[^2\}$ joukon $\mathbb{R}^2$ topologia?

30. Osoita Banachin kiintopistelauseen avulla, että yhtälöllä $x^3 - 7x + 1 = 0$ on täsmälleen yksi juuri välillä $[0, 1]$. Muodosta jokin jono, joka suppenee kohti tätä juurta.

31. Olkoon $x \in [0, 1]$. Osoita, että jono $\cos x, \cos(\cos x), \cos(\cos(\cos x)), \ldots$ suppenee. Mitä pistettä kohti se suppenee? Pisteelle ei tarvitse määrittää tarkkaa numeerista arvoa, mutta eräs kurssin lause kertoo pisteen luonteesta paljon.