Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Kertaustehtäviä ensimmäiseen kurssikokeeseen[1]
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. a) Olkoon $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sisätuloavaruus. Miten sisätulon $\langle\cdot,\cdot\rangle$ avulla voidaan määritellä normi joukkoon E? Osoita, että tämä normi tosiaan täyttää normin ehdot.
   b) Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Miten normin $\|\cdot\|$ avulla voidaan määritellä metriikka joukkoon V? Osoita, että tämä metriikka tosiaan täyttää metriikan ehdot.
   c) Olkoon $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sisätuloavaruus. Miten sisätulon avulla voidaan määritellä metriikka joukkoon E?

2. Olkoot $\|\cdot\|_\alpha$ ja $\|\cdot\|_\beta$ vektoriavaruuden V normeja. Osoita, että kaavan $\|\bar{v}\|_\gamma = \|\bar{v}\|_\alpha + \|\bar{v}\|_\beta$ määrittelemä summakuvaus on myös avaruuden V normi.

3. Osoita, että kuvaus $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$\|(x,y)\| = |x| + |y|,$$
määrittelee normin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

4. a) Osoita, että kuvaus $d_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x-y|$, määrittelee metriikan avaruudessa $\mathbb{R}$.
   b) Osoita, että kuvaus $d_2\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_2(x,y) = |x^2 - y^2|$, ei määrittele metriikkaa avaruudessa $\mathbb{R}$.

5. Olkoot d_1 ja d_2 joukon X metriikoita. Osoita, että kuvaus $d_1 + d_2\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $(d_1+d_2)(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$, on myös metriikka joukossa X.

6. Voiko jossakin metrisessä avaruudessa olla voimassa $B(a,r) = S(a,r)$ jollakin pisteellä a ja jollakin $r > 0$?

7. Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Määritä joukot $B(a,1)$, $\overline{B}(a,1)$ ja $S(a,1)$, kun
   a) $X = \mathbb{R}$, d on euklidinen metriikka ja $a = 5$;
   b) $X = \mathbb{R}^2$, d on yhtälön $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$ määrittelemä metriikka ja $a = (1,2)$;
   c) $X = \mathbb{R}^7$, d on $\{0,1\}$-metriikka ja $a = \bar{0}$.

[1] Toinen versio: pari typoon rinnastettavaa virhettä korjattu 11.10.2013

8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $p \in X$ kiinnitetty piste. Mitkä metriikan ehdot kuvaus $d_p \colon X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_p(x, y) = d(x, p) + d(p, y),$$

toteuttaa?

9. Miten määritellään käsitteet avoin joukko ja suljettu joukko? Anna esimerkki jonkin metrisen avaruuden avoimesta joukosta, suljetusta joukosta ja joukosta, joka ei ole avoin eikä suljettu.

10. Miten määritellään joukon sulkeuma? Osoita, että joukko on suljettu jos ja vain jos se on oma sulkeumansa.

11. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$.

    a) Osoita, että joukko $X \setminus \{x_1\}$ on avoin.

    b) Osoita, että joukko $X \setminus A$ on avoin.

12. Olkoon $\mathbb{R}^2$ varustettu euklidisella metriikalla. Osoita, että joukko $A =]0, 1[^2$ on avoin.

13. Anna esimerkki tilanteesta, jossa avointen joukkojen ääretön leikkaus

    a) on avoin;

    b) ei ole avoin.

14. Anna esimerkki tilanteesta, jossa suljettujen joukkojen ääretön yhdiste

    a) on avoin;

    b) ei ole avoin eikä suljettu.

15. Olkoon $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ varustettu max-metriikalla d, $d(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$. Osoita, että joukko $D = \{f \in C[0, 1] \mid f(t) \geq 0 \text{ jollakin } t \in [0, 1]\}$ on suljettu avaruudessa $C[0, 1]$.

16. Tutki, ovatko seuraavat joukot avoimia, suljettuja, avoimia ja suljettuja vai ei-avoimia ja ei-suljettuja. Jos joukko ei ole suljettu, määritä sen sulkeuma. Käytössä on tavallinen euklidinen metriikka (tai sen rajoittuma), jos ei toisin mainita.

    (i) $A =]0, 1[\subset \mathbb{R}$

    (ii) $B = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

    (iii) $C = [0, 1[\subset \mathbb{R}$

    (iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1], |y| < |x|\}$

(v) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 5\} \subset \mathbb{R}^2$

(vi) $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}^c \subset \mathbb{R}$

17. Miten määritellään jatkuva kuvaus kahden metrisen avaruuden välillä?

18. Miten määritellään Lipschitz-kuvaukset? Osoita, että jokainen Lipschitz-kuvaus on jatkuva.

19. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $\mathbb{R}$ varustettu euklidisella metriikalla ja $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ jokaisella $x \in X$ (eli kuvaus f on vakiokuvaus). Osoita, että kuvaus f on jatkuva.

20. Olkoon d euklidinen metriikka ja d' $\{0, 1\}$-metriikka avaruudessa $\mathbb{R}$. Osoita, että

    (i) kuvaus $f : (\mathbb{R}, d') \to (\mathbb{R}, d)$, $f(x) = x$, on jatkuva;

    (ii) kuvaus $g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$, $g(x) = x$, on epäjatkuva.

21. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Osoita, että kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x_0, x)$, on 1-Lipschitz.

22. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Osoita, että joukko $A = \{x \in X : 3 < d(x, x_0) < 5\}$ on avoin.

23. Olkoon $f : [-10, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^8 - 720$. Osoita, että f on jatkuva kuvaus näyttämällä, että se on M-Lipschitz jollakin vakiolla $M \geq 0$.

24. Mitä tarkoittaa, että metrinen avaruus (X, d) on diskreetti? Osoita, että diskreetin metrisen avaruuden jokainen osajoukko on sekä avoin että suljettu.

25. Olkoon (X, d) diskreetti metrinen avaruus ja (Y, d') mikä tahansa metrinen avaruus. Osoita, että jokainen kuvaus $f \colon X \to Y$ on jatkuva.

26. Olkoon $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

    a) Määritä joukon A kasautumispisteet.

    b) Määritä joukon A sulkeuma.

    c) Määritä joukon A erakkopisteet.

27. Olkoon $A = [0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$.

a) Osoita, että joukko A ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

b) Osoita, että joukko A on avoin joukossa $[0, 2] \times [0, 5]$.

c) Osoita, että joukko A on suljettu joukossa $[-2, 1[\times[-2, 1[$.

d) Määritä joukon A sulkeuma joukossa $[0, 1] \times [0, 1[$.

28. Määritä seuraavat joukot:

a) $\mathrm{pr}_1\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

b) $\mathrm{pr}_1\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\}$

c) $\mathrm{pr}_3\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x|\}$

d) $\mathrm{pr}_2\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-7, 5], y = x^2\}$