Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 11[1,2]
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 13 ja 14. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 5.12.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Olkoon $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y^6 \leq 10z^4 \leq 100\}$. Osoita, että on olemassa sellainen $(a, b, c) \in A$, että $e^{a+b+c} \leq e^{x+y+z}$ kaikilla $(x, y, z) \in A$.

2. a) Onko joukko $B :=]0, 1[^2 \cup]1, 2[^2$ yhtenäinen?
   b) Osoita, että joukko $B \cup \{(1, 1)\}$ on murtoviivayhtenäinen.

3. Olkoon (X, d) yhtenäinen metrinen avaruus, (Y, d') metrinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ sellainen kuvaus, että jokaisella $x \in X$ on olemassa sellainen ympäristö U_x, että rajoittumakuvaus $f_{|U_x}$ on vakio. Osoita, että kuvaus f on tällöin vakiokuvaus. Näytä vastaesimerkillä, että tämä ei päde yleisesti, jos avaruutta X ei oletetan yhtenäiseksi.

4. Olkoon (X, d) diskreetti metrinen avaruus.
   a) Millainen joukon X tulee olla, että avaruus (X, d) on kompakti?
   b) Millainen joukon X tulee olla, että avaruus (X, d) on yhtenäinen?

5. Osoita, että avaruudet $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfiset.

6. Onko metrisen avaruuden avoin kuula aina yhtenäinen joukko?

[1] Vikat laskarit! \o/
[2] Versio 2: päivämäärä ja kirjan kappaleet korjattu.