

1. Voit edetä tehtävässä esimerkiksi seuraavasti.
 - Päättele, että $d(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$. Montako pistettä joukossa $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ voi tällöin korkeintaan olla?
 - Valitse jokaisella $n \in \mathbb{N}$ jokin piste $x_n \in A_n$. Osoita, että jono (x_n) on Cauchy ja päättele, että jokainen sen osajono on Cauchy.
 - Käytä joukkojen A_n ominaisuutta ja päättele, että jono $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ on joukon A_n jono ja se suppenee kohti pistettä a . Päättele, että piste a kuuluu joukkojen A_n leikkausjoukkoon.

2. Valitse jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $x_n \in A_n$. Kompaktisuuden nojalla päättele, että sillä on joukossa A_1 osajono, joka suppenee kohti pistettä $a \in A_1$. Lauseen 11.17 ja joukkojen A_n kompaktisuuden perusteella päättele, että piste a kuuluu leikkausjoukkoon.

3.
 - a) Voit esimerkiksi osoittaa, että kuvaus f on Lipschitz-kuvaus.
 - b) Voit esimerkiksi käyttää kurssin Analyysi II kurssimateriaalin Lausetta 3.5 välillä $[-10, 10]$ ja väliarvolausetta joukossa $]-\infty, -8] \cup [8, \infty[$.

4. Muista Lauseet 12.5, 12.6 ja 13.14.

5. Valitse mielivaltainen piste $a \in X$ ja tarkastele sen $r/2$ -säteistä kuulaympäristöä. Montako jonon pistettä tähän kuulaan voi korkeintaan kuulua?

6. Koska kuvaus f on kontraktio, on olemassa sellainen $q \in [0, 1[$, että $\|f(u) - f(v)\| \leq q\|u - v\|$.

- Osoita aluksi, että kuvaus F on bilipschitz näyttämällä, että

$$(1 - q)\|u - v\| \leq \|F(u) - F(v)\| \leq (1 + q)\|u - v\|$$

kaikilla $u, v \in E$. Päätele tästä, että kuvaus F on jatkuva.

- Määrittele sitten jokaisella $y \in E$ kuvaus $g_y: E \rightarrow E$ kaavalla

$$g_y(x) = y - f(x),$$

ja näytä, että jokainen kuvaus g_y täyttää Banachin kiintopistelauseen oletukset.

- Määrittele kuvaus $G: E \rightarrow E$ seuraavasti: jokaisella $y \in E$ piste $G(y)$ on kuvauksen g_y yksikäsitteinen kiintopiste, eli

$$G(y) = g_y(G(y)) = y - f(G(y)).$$

- Osoita, että G ja F ovat toistensa käänteiskuvauksia.
- Osoita, että kuvaus G on jatkuva käyttäen hyväksi sitä tietoa, että kuvaus F on bilipschitz.