Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 10 (2 sivua)
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 12 ja 13. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 28.11.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ laskeva jono epätyhjiä suljettuja X:n osajoukkoja, joille on voimassa
$$d(A_n) \to 0.$$
Osoita, että joukossa $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on täsmälleen yksi piste.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ laskeva jono epätyhjiä kompakteja X:n osajoukkoja. Osoita, että joukko $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

3. a) Osoita, että kuvaus $f \colon [0, 1500] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on tasaisesti jatkuva.
   b) Onko kuvaus $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, tasaisesti jatkuva?

4. Mitkä seuraavista joukoista ovat kompakteja? Mitkä niistä ovat täydellisiä?
   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy \leq 3\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$
   c) $C = \{f_n \in C[0, 1] : f_n(x) = x^n, n \in \{1, 2, \ldots, 70\}\}$, kun avaruus $C[0, 1]$ varustetaan tavallisella sup-metriikalla.
   d) $D = ([0, 1], d_{\{0,1\}})$, kun $d_{\{0,1\}}$ on avaruuden $[0, 1]$ $\{0, 1\}$-metriikka.

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Oletetaan, että on olemassa sellainen luku $r > 0$ ja sellainen X:n jono (x_n), että $d(x_n, x_k) \geq r$ kaikilla $n \neq k$.
   a) Osoita, että jono (x_n) ei suppene.
   b) Osoita, että jonon (x_n) yksikään osajono ei suppene.
   c) Osoita, että avaruus (X, d) ei ole kompakti.

6. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ täydellinen normiavaruus ja olkoon $f\colon E \to E$ kontraktio. Osoita, että yhtälö

$$F(x) = x + f(x)$$

määrittelee homeomorfismin $F\colon E \to E$, joka on bilipschitz.