

1. Voit käyttää seuraavia arvioita: jos  $a, b \geq 0$ , niin

$$a + b \leq 2 \max\{a, b\} \quad \text{ja} \quad a + b \geq \frac{1}{2} \max\{a, b\}.$$

2. Käytä Lauseita 12.5 ja 12.6 ja tutki, mitkä joukoista ovat suljettuja.

3. a) Osoita, että annetut kuvaukset ovat 1/2-Lipschitz-kuvauksia.  
b) Annetut kuvaukset ovat kutistusten ja siirtojen yhdisteitä. Määritä, mihin pisteisiin kolmion kulmat kuvautuvat.  
c) Vastauksen voi löytää esimerkiksi englanninkielisen Wikipedian sivulta, joka käsittelee Hausdorff-dimensiota.

4. Lähde rohkeasti tutkimaan erotusten itseisarvoja  $|x_n - x_m|$  ja  $|y_n - y_m|$ . Käytä reaalityökalujen kolmioepäyhtälöä ja tietoa kosinin itseisarvosta ja laske annetulle integraalille tarkka arvo.

5. Kiinnitä joukon  $fX$  Cauchy-jono ( $f(x_n)$ ) ja osoita, että se suppenee. Saat tehtyä tämän seuraavasti:

- Osoita bilipschitz-ehdon vasemman puolen avulla, että jono  $(x_n)$  on Cauchy.
- Käytä avaruuden  $X$  täydellisyyttä jonoon  $(x_n)$ .
- Käytä bilipschitz-ehdon oikeaa puolta ja Lausetta 11.8.

6. Hae diskreetin metrisen avaruuden jonon Cauchy-ehdolle niin tarkka muotoilu kuin pystyt. Milloin tällainen jono suppenee?