Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 9[1] (2 sivua)
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 10, 11 ja 12. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 21.11.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Määritellään joukon $\mathbb{R}^2$ metriikka d_m yhtälöllä

$$d_m((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Osoita, että metriikka d_m on ekvivalentti $\mathbb{R}^2$:n euklidisen metriikan kanssa. Ovatko d_m ja euklidinen metriikka bilipschitz-ekvivalentit?

2. Mitkä seuraavista joukoista ovat täydellisiä? Tehtävässä voit käyttää tietoja, joita olet oppinut kurssin ensimmäisellä periodilla, ilman tarkkoja todistuksia.

   a) $\overline{B}((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$
   b) $[0,1] \subset \mathbb{R}$
   c) $B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\}$
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^{10} < -20\}$
   f) ∂A, $A \subset \mathbb{R}^7$

3. Määritellään kuvaukset $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ehdoilla

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y), \\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right), \\
\psi_3(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).
\end{aligned}$$

   a) Osoita, että kuvaukset ψ_1, ψ_2 ja ψ_3 ovat kontraktioita.
   b) Olkoon A tasasivuinen kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Merkitään $\psi B := \bigcup_{i=1}^{3} \psi_i B$ kaikilla joukoilla $B \subset \mathbb{R}^2$. Piirrä joukot ψA, $\psi[\psi A]$ ja $\psi[\psi[\psi A]]$.
   c) Selvitä, millä nimellä kutsutaan joukkoa, jonka konstruktion ensimmäisiä vaiheita piirsit edellisessä kohdassa.

[1] Versio 3: tehtävässä 3 korjattiin kolmion A kolmas kärki oikeaksi ja tehtävässä 6 muutettiin diskreetti metrinen avaruus joukoksi varustettuna $\{0,1\}$-metriikalla.

4. Osoita määritelmästä lähtien, että seuraavat jonot ovat Cauchyn jonoja.

   a) (x_n), jossa
   $$x_n = \frac{\sqrt{n}\cos(n^2\pi^{n^2})}{n+1}.$$

   b) (y_n), jossa
   $$y_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$
   ja
   $$f_n(x) = \frac{x^2+1}{n}.$$

5. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus, (Y, d') metrinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ bilipschitz-kuvaus. Osoita, että joukko $fX \subset Y$ on täydellinen.

6. Olkoon X joukko ja $d_{\{0,1\}}$ sen $\{0,1\}$-metriikka. Milloin osajoukko $A \subset X$ on täydellinen? Anna täydellisyydelle tarkka ja täsmällinen ehto.