Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Vihjeitä harjoitustehtäviin 8 (2 sivua)
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. Muodosta kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka venyttää ja siirtää joukkoa A siten, että siitä muodostuu joukko B ja osoita, että f on homeomorfismi.

2. a) Suppenevan jonon tulee olla rajoitettu. Onko jonolla yhtään rajoitettua osajonoa?
   b) Muista, että sini-funktio on 2π-periodinen.
   b) Luvulla $10^{10^{10}}$ jaollisia lukuja $n \in \mathbb{N}$ on ääretön määrä.

3. a) Mitä tiedät lukujen x ja x^2 suuruusjärjestyksestä, kun $x \in [0,1[$?
   b) Etsi jono $((x_n, y_n))$ joukon $]0,1[^2$ alkioita, joille on voimassa $x_n^2 < y_n < x_n^4$, ja osoita, että tällöin $f(x_n, y_n) \to 1 \neq f(0,0)$.

4. Määrittele kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to S((0,0,0),1) \setminus \{(0,0,1)\}$ kaavalla
$$f(x,y) = \left(\frac{2x}{1+\|(x,y)\|^2}, \frac{2y}{1+\|(x,y)\|^2}, \frac{\|(x,y)\|^2-1}{\|(x,y)\|^2+1}\right)$$
ja kuvaus $g\colon S((0,0,0),1) \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ kaavalla
$$g(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$
Osoita ensin, että kuvaukset f ja g ovat jatkuvia. Osoita sitten, että kuvaukset f ja g ovat toistensa käänteiskuvauksia käyttämällä tietoa, että joukossa $S((0,0,0),1)$ on voimassa $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Päättele tästä, että kuvaus f on bijektio, jolloin olet osoittanut kaikki homeomorfismin ehdot.

5. Tutki pisteittäiset suppenemiset ensin. Lauseen 11.21 nojalla jono (f_n) ei voi supeta tasaisesti, jos se ei suppene pisteittäin, ja jos jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f, niin se ei voi supeta tasaisesti kohti mitään toista funktiota.

6. a) Muista Lause 9.3.

b) Tehtävä on lyhyt. Oleta, että joukko $K \subset X$ on kompakti ja että kokoelma $\mathscr{C}$ on joukon fK avoin peite. Valitse peitteelle $\mathscr{C}$ sopiva osapeite päättelemällä, että kokoelma $\mathscr{D} = \{f^{-1}C : C \in \mathscr{C}\}$ on joukon K avoin peite ja käyttämällä joukon K kompaktisuutta.