Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 8 (2 sivua)
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 9 ja 11. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 14.11.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukot $A = [0,2] \times [0,1]$ ja $B = [4,7] \times [-10,10]$ ovat homeomorfiset.

2. Onko seuraavilla avaruuden $\mathbb{R}$ jonoilla suppenevaa osajonoa? Mitä pistettä kohti osajono suppenee, jos se on olemassa?

   a) $1, 2, 3, \ldots$
   b) $(\sin((n\pi)/10))_{n\in\mathbb{N}}$
   c) (x_n), kun[1]

$$x_n = \begin{cases} 1/n, & \text{jos } n \text{ on jaollinen luvulla } 10^{10^{10}} \\ n, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

3. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $f(x,y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$, ja $f(x,y) = 0$ muissa pisteissä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Osoita, että jos L on origon kautta kulkeva suora, niin

$$\lim_{\bar{z}\to\bar{0}, \bar{z}\in L} f(\bar{z}) = 0.$$

   b) Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\bar{z}\to\bar{0}, \bar{z}\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ ei ole olemassa.

4. Näytä, että taso $\mathbb{R}^2$ ja joukko $S((0,0,0),1) \setminus \{(0,0,1)\}$ ovat homeomorfiset (kurssin kotisivuilta löytyvistä vihjeistä on paljon apua).

5. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \max\{0, x-n\}$, jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

   a) Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin tai tasaisesti, kun avaruus $\mathbb{R}$ varustetaan euklidisella metriikalla?
   b) Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin tai tasaisesti, kun avaruus $\mathbb{R}$ vastustetaan $\{0,1\}$-metriikalla?

[1] Luku $n \in \mathbb{N}$ on jaollinen luvulla $m \in \mathbb{N}$, jos $n/m \in \mathbb{N}$.

Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Kokoelma $\mathscr{A} = \{A_j \subset X : i \in I\}$ on joukon $A \subset X$ *avoin peite*, jos $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ ja jokainen joukko A_i on avoin. Kokoelma $\mathscr{B} = \{B_j \subset X : j \in J\}$ on peitteen $\mathscr{A}$ *osapeite*, jos $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ ja $A \subset \bigcup_{j \in J} B_j$.

6. Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ homeomorfismi.

   a) Osoita, että jokaisen joukon $K \subset X$ avoimen peitteen $\mathscr{A}$ kuva $f\mathscr{A} = \{fA_i : A_i \in \mathscr{A}\}$ on joukon fK avoin peite.

   b) Joukko $K \subset X$ on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite[2] Osoita, että jos K on kompakti avaruudessa X, niin fK on kompakti avaruussa Y.

[2]Siis jos $\mathscr{A}$ on joukon K avoin peite, niin on olemassa sellaiset $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathscr{A}$, että $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.