Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 7[1]
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 3, 8 ja 11. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 7.11.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Suppenevatko seuraavat $\mathbb{R}^3$:n jonot? Perustele vastauksesi.

   a) $((1/n, 1/n^2, 1/n^3))_{n\in\mathbb{N}}$
   b) $((\sin(1/n), \cos(1/n^2), \sin(1/n^3)))_{n\in\mathbb{N}}$
   c) $(((-1)^n \sin(1/n), (-1)^n \cos(1/n^2), (-1)^n \sin(1/n^3)))_{n\in\mathbb{N}}$

2. Varustetaan joukko $\mathbb{R}$ $\{0,1\}$-metriikalla ja olkoon (x_n) jono joukossa $\mathbb{R}$. Milloin jono (x_n) suppenee? Anna suppenemiselle tarkka ehto.

3. Varustetaan joukko $\mathbb{R}^2$ tavallisella euklidisella metriikalla. Olkoon $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Määritä joukot $\mathrm{int}A$, ∂A ja $\overline{A}$.

4. Lausu joukko $\mathbb{R}$ yhdisteenä kahdesta sisäpisteettömästä joukosta.

5. Varustetaan avaruus $C[0,1]$ sup-metriikalla ja tarkastellaan osajoukkoa $A = \{f \in C[0,1] : f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\}$. Ovatko seuraavat alkiot joukon A sisä-, ulko- vai reunapisteitä?

   a) $f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 + 1$
   b) $f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -20x - 5$
   c) $f_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = x$

6. Onko kokoelma τ_1 tai τ_2 joukon $\mathbb{R}$ topologia[2], kun

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset,\ \mathbb{R},\ [2,3],\ ]{-\infty},3],\ ]2,\infty[\},\\ \tau_2 &= \{\emptyset,\ \mathbb{R}\} \cup \{\ ]a,\infty[\ :\ a \in \mathbb{R}\}?\end{aligned}$$

---

[1] Versio 3. Versiossa 2 tehtävään 1 lisätty ylimääräisiä sulkuja, tehtävään 4 lisättiin tieto, että tarkoitettu joukko on $\mathbb{R}$, tehtävään 5 lisättiin maininta sup-metriikasta ja tehtävän 6 muotoilua muutettiin hieman. Versiossa 3 tehtävästä 6 poistettiin ylimäätäinen miinusmerkki kokoelman τ_2 määrittelystä.

[2] Topologian määritelmä löytyy kirjan kohdasta 3.13.