Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 6 (2 sivua)[1]
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 5-7. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 10.10.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

Viimeinen tähdellä merkitty tehtävä on tavallista haastavampi tehtävä, jonka tekemisestä saa merkitä yhden tehtävän mutta jota ei välttämättä ehditä käydä läpi itse laskuharjoitustilaisuudessa. Tehtävää ei tarvitse tehdä saadakseen täydet harjoituspisteet.

---

1. Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^2$ varustettuna euklidisella metriikalla. Anna esimerkit sellaisista toisistaan eroavista avoimista joukoista $A_i \subset \mathbb{R}^2$ ja suljetuista joukoista $B_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in \mathbb{N}$, että

   a) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ on suljettu;

   b) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ on avoin.

2. a) Onko joukko $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \{-1,0,1\}\}$ avoin joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$?

   b) Piirrä joukko $\{(x,y) \in \overline{B}((0,0),1) : xy > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Onko se avoin avaruudessa $\overline{B}((0,0),1)$? Entä avaruudessa $\mathbb{R}^2$?

3. Määritä joukon $\mathbb{Q}$ sulkeuma avaruudessa $\mathbb{R}$. Vaihtoehtoinen tehtävä: määritä joukon $\mathbb{Q}$ reuna avaruudessa $\mathbb{R}$.

4. Osoita Lauseen 6.13 avulla, että joukko $[0,3] \times [0,2]$ on suljettu.

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2 + xy, e^{e^{x+y^2}}, 2)$.

   i) Määritä kuvauksen f komponenttikuvaukset.

   ii) Onko kuvaus f jatkuva?

   iii) Onko joukolle $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln|x^2+1| + y^5 < 3 \leq y^3\}$ voimassa $f\overline{D} \subset \overline{fD}$?

6. Olkoon $d_{\{0,1\}}$ joukon X $\{0,1\}$-metriikka. Osoita, että jokaiselle joukolle $E \subset X$ on voimassa $\overline{E} \subset E$.

[1] Versio 2. Tehtävää 7 tarkennettiin hieman jälkikäteen 6.10.2013.

7.* Määritellään positiivisella reaaliakselilla $[0,\infty[$ niin sanotut (tavalliset) *dyadiset välit* (tai *dyadiset kuutiot*) joukkokokoelmana

$$\mathscr{D} := \{2^{-k}([0,1[+m) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Osoita, että kaava

$$d(x,y) = \inf\{d_e(Q) : Q \in \mathscr{D}; x, y \in Q\}$$

määrittelee metriikan joukossa $[0,\infty[$, kun $d_e(Q)$ tarkoittaa joukon Q läpimittaa euklidisessa metriikassa.