Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 5
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 4 ja 5. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 3.10.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Olkoon $A := [0,3] \times [0,2]$. Määritä ja piirrä joukko $B(A,1)$.

2. Osoita, että joukot

   (i) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^3 < 5 \text{ tai } y^5 - 2 > 0\}$
   (ii) $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xz > y \text{ ja } y^2 + x < 2y\}$
   (iii) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1-y)\}$

   ovat avoimia.

3. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ehdoilla

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

   i) Osoita, että kuvaus f ei ole jatkuva.
   ii) Olkoon $A_0 := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ ja $A_k := \{(x,kx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että kuvaus $f_k\colon A_k \to \mathbb{R}$, $f_k(x,y) = f(x,y)$, on jatkuva jokaisella $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4. Olkoon $f\colon X \to Y$ M-Lipschitz ja olkoon $g\colon Y \to Z$ N-Lipschitz. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ on myös Lipschitz-kuvaus.

5. Olkoot A ja B metrisen avaruuden epätyhjiä osajoukkoja ja $d(A,B) > 0$. Osoita, että $d(x,A) + 5d(x,B) > 0$ kaikilla $x \in X$ ja että yhtälön

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + 5d(x,B)}$$

   määrittelemä funktio $f\colon X \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Määritä myös funktion f suurin ja pienin arvo.

6. Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Joukon A *reuna* on joukko

$$\partial A := \{x \in X : B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ ja } B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \text{ jokaisella } r > 0\}.$$

   Osoitimme aiemmin, että joukko A on avoin jos ja vain jos $A \cap \partial A = \emptyset$. Osoita tämän tuloksen nojalla, että joukko $B \subset X$ on suljettu jos ja vain jos $\partial B \subset B$.