Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Vihjeitä harjoitustehtäviin 4
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

---

1. Palauta mieleesi, miten voit ilmaista De Morganin lakien (kurssikirjan kohta 0.4) avulla joukot $(A \cup B)^c$ ja $(A \cap B)^c$. Lauseista 3.4 ja 3.5 voi olla apua.

2. a) Seuraa luennoilla käytyä esimerkkiä tai - jos et ollut luennoilla - lähde rohkeasti tutkimaan pisteiden $f(x)$ ja $f(y)$ etäisyyttä $d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2|$.
   b) Osoita, että jokaisella $M \geq 0$ on olemassa sellaiset pisteet $a, b \in \mathbb{R}$, että $d(g(a), g(b)) > Md(a, b)$.

3. Kiinnitä $g \in A$ ja huomaa, että g saa pienimmän arvonsa $\alpha > 0$ välillä $[0, 1]$. Osoita, että $B(g, \alpha/2) \subset A$.

4. a) Kiinnitä $n \in \mathbb{N}$ ja osoita, että on olemassa niin pieni $r_n > 0$, että $B(1/n, r_n) \cap A = \{1/n\}$.
   b) Muista, että $1/n \to 0$, kun $n \to \infty$, ja että $B(0, r) =]-r, r[$ kaikilla $r > 0$.

5. Muista Lause 4.8! Miten voit ilmaista joukon E avoimen joukon alkukuvana jonkin jatkuvan kuvauksen suhteen?

6. Tehtävä voi vaikuttaa luotaantyöntävältä, mutta se ei ole erityisen pitkä eikä hankala sitten, kun sen ideasta saa kunnolla kiinni!

   a) Muista, että jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja jokaisella $r > 0$ on voimassa $B(a, r) =]a - r, a + r[$. Jos $a \in \mathbb{R}$ on kiinnitetty, miten pisteet b, c ja d pitää valita, että $B(a, r) \subset B(b, r/2) \cup B(c, r/2) \cup B(d, r/2)$?
   b) Voit edetä esimerkiksi seuraavalla tavalla:
      - Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on voimassa $\#B(x, n) = 2 \cdot \#B(x, n-1) + 2$ jokaisella $x \in X$.
      - Osoita sitten, että $\#B(x, 2n) > n \cdot \#B(x, n)$ jokaisella $n \geq 2$ ja jokaisella $x \in X$.
      - Päättele, että $2n$-säteisen avoimen kuulan peittämiseen tarvitaan ainakin n kappaletta n-säteisiä avoimia kuulia, mikä todistaa väitteen.