Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 4 (2 sivua)
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 3 ja 4. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa **perjantaina 27.9.2013**. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Joukko $D \subset X$ on *suljettu*, jos joukko D^c on avoin.
   a) Osoita, että kahden suljetun joukon yhdiste on suljettu.
   b) Osoita, että kahden suljetun joukon leikkaus on suljettu.

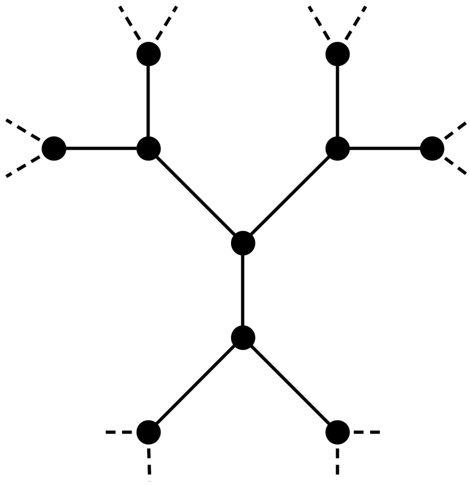
2. a) Osoita, että kuvaus $f\colon [0, 1000] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on Lipschitz.
   b) Osoita, että kuvaus $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, ei ole Lipschitz.

3. Olkoon avaruudessa $C[0, 1]$ käytössä sup-normin antama metriikka. Osoita, että joukko $A := \{f \in C[0, 1] : f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}$ on avoin.

4. a) Osoita, että joukko $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ on diskreetti joukko.
   b) Osoita, että joukko $B := A \cup \{0\}$ ei ole diskreetti joukko.

5. Osoita, että joukko $E := \{x \in \mathbb{R} : 50x^7 - 32x^5 + 4x^2 < 4x^3 + 15\}$ on avoin.

6. Sanomme, että joukot A_j, $j \in J$, peittävät joukon B, jos $B \subset \bigcup_{j \in J} A_j$.
   a) Olkoon d avaruuden $\mathbb{R}$ euklidinen metriikka. Osoita, että jokainen kuula $B(x, r) \subset \mathbb{R}$ voidaan peittää vakiomäärällä $r/2$-säteisiä kuulia (määrä ei siis saa riippua luvusta r).
   b) Olkoon seuraavalla sivulla oleva rajoittamaton verkko X varustettu samanlaisella metriikalla d kuin viime viikon harjoitusten tehtävän 2 verkko. Osoita, että avaruudella (X, d) ei ole samaa ominaisuutta kuin a-kohdan avaruudella, eli että mitä tahansa kuulaa $B(x, r)$ ei voida peittää vakiomäärällä $r/2$-säteisiä kuulia (riippumatta luvusta r).



Kuva 1: Verkko X.