Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Vihjeitä harjoitustehtäviin 3
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

---

1. Tehtävässä tulee yksinkertaisesti tutkia, millainen pallosta tulee näiden normien määräämissä metriikoissa. Lause 2.2 kertoo, miten normi määrää metriikan, ja kirjan kohdasta 2.6 (sivu 22) löytyy pallon määritelmä.

2. Tehtävässä täytyy vain tietää kuulien ja pallojen määritelmät (kirjan sivu 22, kohta 2.6). Tehtävä ei ole vaikea eikä pitkä, jos määritelmät ovat vain hallussa!

3. Tehtävässä tulee antaa esimerkki metrisestä avaruudesta $(X, d)$ ja epätyhjistä joukoista $A, B \subset X$, joille on voimassa $A \cap B = \emptyset$ ja $d(A, B) = 0$. Ei kannata lähteä hakemaan mitään hankalaa esimerkkiä. Joukkojen välisen etäisyyden määritelmä löytyy kirjan sivulta 24, kohdasta 2.9.

4. 
   - Joukon läpimitan määritelmä löytyy kirjan sivulta 24, kohdasta 2.11.
   - Joukon $A$ läpimitta $d(A)$ on luku $M$, jos on voimassa $d(A) \geq M$ ja $d(A) \leq M$.
   - Muista supremumia käsitellyt tulokset luennoilta ja ylimääräisestä monisteesta!
   - Mieti, seuraako jokin tehtävän kohta jostakin toisesta kohdasta.

5. Tarkoituksena on tarkistaa, ovatko metriikan ehdot voimassa. Kohdassa (b) on suositeltavaa todistaa ensin aputulos: jos $s, t \geq 0$, niin $\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$.

6. Avoimen joukon määritelmä löytyy kirjan sivulta 29, kohdasta 3.1. Hahmottele joukoista kuvat ja mieti, voiko joukon jokaiselle pisteelle valita määritelmän vaatiman säteen euklidisessa metriikassa. Kohdassa (ii) Lauseesta 3.4 voi olla hyötyä sitten, kun on palauttanut mieleen, millaisia avaruuden $(\mathbb{R}^2, d_{\{0,1\}})$ avoimet kuulat ovat.