

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 2 ja 3. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 19.9.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

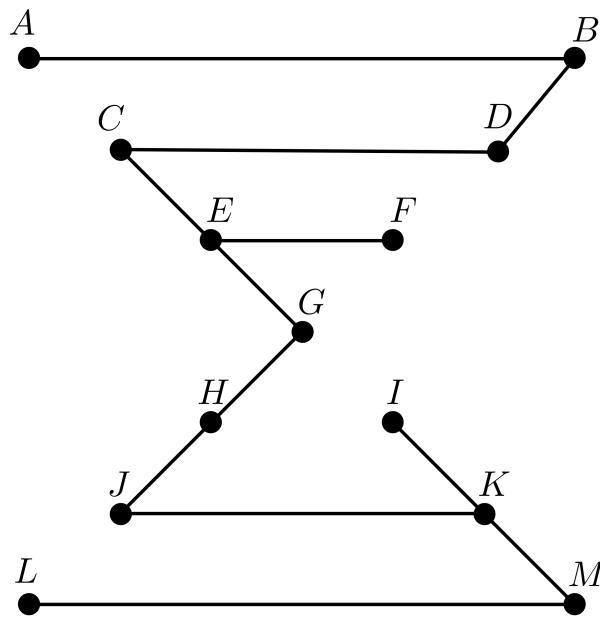
1. Piirrä pallo $S(\bar{0}, 2)$ avaruudessa \mathbb{R}^2 , kun käytössä on normin

(i) $\|\cdot\|_1$, $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, määräämä metriikka;

(ii) $\|\cdot\|_2$, $\|(x, y)\|_2 = \max\{|x|, |y|\}$, määräämä metriikka.

2. Alla olevaan verkkoon¹ $X = \{A, B, \dots, M\}$ voidaan määritellä metriikka d seuraavasti:

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$;
- $d(x, y) = 1$, jos x :n ja y :n välillä on viiva;
- $d(x, y)$ on pienin määrä viivoja, joita pitkin päästään kulkemaan x :stä y :hyn.



Kuva 1: Verkko X.

Määritä $B(A, 4)$, $\bar{B}(J, 2)$ ja $S(F, 3)$. Mikä on pienin luku $r > 0$, jolle pätee $B(G, r) = X$?

3. Anna esimerkki tilanteesta, jossa kahden erillisen joukon välinen etäisyys on 0.

¹Verkko koostuu pisteistä ja niitä yhdistävistä viivoista, mutta emme tässä tehtävässä nimeä viivoja.

4. a) Varustetaan joukko \mathbb{R} tavallisella euklidisella metriikalla d_1 . Määritä joukon $[0, 1]$ läpimitta.
- b) Varustetaan joukko \mathbb{R}^2 tavallisella euklidisella metriikalla d_2 . Määritä joukon $[0, 1]^2$ läpimitta.
- c) Varustetaan joukko \mathbb{R}^3 tavallisella euklidisella metriikalla d_3 . Määritä joukon $[0, 1]^3$ läpimitta.
- d) Varustetaan joukko \mathbb{R}^n tavallisella euklidisella metriikalla d_n . Määritä joukon $[0, 1]^n$ läpimitta.
5. Tutki, ovatko seuraavat funktiot f ja g metriikoita reaaliakselilla:
- (a) $f(x, y) = |x - y|^2$,
- (b) $g(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.
6. Tutki, ovatko joukot $]0, 4[\times]0, 2[$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, 0) : \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 7919\}\}$ avoimia avaruudessa \mathbb{R}^2 , kun käytössä on
- (i) euklidinen metriikka;
- (ii) $\{0, 1\}$ -metriikka.