Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 2[1]
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 1 ja 2. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 12.9.2013. Huomaa, että tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

---

1. Olkoon $\|\cdot\|$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ euklidinen normi.

   a) Laske pisteiden $(-7,2) \in \mathbb{R}^2$ ja $(3,5) \in \mathbb{R}^2$ välinen etäisyys geometrisesti Pythagoraan lauseen avulla. Laske sitten $\|(-7,2)-(3,5)\|$.

   b) Laske pisteiden $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ ja $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ välinen etäisyys geometrisesti Pythagoraan lauseen avulla. Laske sitten $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|$.

   Mitä huomaat?

2. Määritellään funktiot f, g ja h seuraavasti:

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\quad f(x) &= -8x^2+8x, \\ g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\quad g(x) &= 7x^2-7x+1, \\ h\colon [0,1] \to \mathbb{R},\quad h(x) &= \begin{cases} 2, & \text{jos } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\\ 3x, & \text{jos } x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}. \end{aligned}$$

   a) Kuuluvatko funktiot f, g ja h avaruuteen $C[0,1]$? Entä avaruuteen $\mathrm{raj}([0,1],\mathbb{R})$?

   b) Määritä funktiot $f+g$, $f-g$ ja $-\pi h$.

   c) Olkoon $\|\cdot\|$ avaruuden $\mathrm{raj}([0,1],\mathbb{R})$ sup-normi. Laske $\|f+g\|$, $\|h\|$ ja $\|-\pi h\|$.

   d) Laske $\|f-g\|$. Mikä tämä luku on kirjan Lauseen 2.2 nojalla?

3. Määritellään avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kuvaus $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

   kun $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Osoita, että kuvaus $\|\cdot\|_1$ on normi[2] avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

4. Näytä, että missä tahansa (epätyhjässä) joukossa X kuvaus $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ 1, & \text{muuten} \end{cases},$$

   määrittelee metriikan[3].

---

[1] Versio 2. Tehtävän 2 funktioita f ja g muokattiin jälkikäteen hieman yksinkertaisemmiksi.
[2] Tätä normia kutsutaan ns. Manhattan- tai L_1-normiksi.
[3] Tätä metriikkaa kutsutaan usein diskreetiksi metriikaksi tai $\{0,1\}$-metriikaksi.

5. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset metriikoita.

   a) $d_1\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1^2 - x_2^2| + |y_1^2 - y_2^2|$,
   b) $d_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1^2 - x_2^2| - |y_1^2 - y_2^2|$,
   c) $d_3\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$,
   d) $d_4\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_4(x, y) = |xy|$,
   e) $d_5\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $d_5((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 y_2 - x_2 z_1| + |z_2 - y_1|$,
   f) $d_6\colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$, $d_6(f, g) = |f(0) - g(0)|$.

   Ylimääräinen tehtävä aktiivisille: tutki jokaisesta kuvauksesta, mitkä metriikan ehdot ne toteuttavat.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $X \neq \emptyset$. Onko mahdollista, että on voimassa $d(x, y) = 0$ kaikilla $x, y \in X$? Entä $d(x, y) = 1$ kaikilla $x, y \in X$? Myönteisessä tapauksessa kerro, millainen joukon X tulee tällöin olla.