Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Vihjeitä harjoitustehtäviin 1
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

1.
- Palauta mieleesi yhdisteen ja leikkauksen määritelmät, ja piirrä tilanteista kuvat.
- Päättele (esimerkiksi kuvien avustuksella), millaisista joukoista on kyse, ja todista, että joukot ovat tosiaan samat.
- Muista, että joukot A ja B todistetaan samoiksi näyttämällä sisältyvyydet kumpaankin suuntaan:

$$\begin{aligned} A \subset B\colon \qquad & x \in A \implies x \in B \\ B \subset A\colon \qquad & x \in B \implies x \in A. \end{aligned}$$

2. Tehtävässä tulee tarkistaa (melko mekaanisesti), että ehdot (S1)-(S5) ovat voimassa avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulolle. Ehdot löytyvät esimerkiksi kurssikirjan sivulta 15 kohdasta 1.2. Esimerkkinä ehdon (S2) todistus:

   Olkoot $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$. Merkitään $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tällöin reaalilukujen ominaisuuksien nojalla pätee

$$\begin{aligned} (a\bar{x}) \cdot \bar{y} &= (ax_1)y_1 + (ax_2)y_2 + \ldots + (ax_n)y_n \\ &= ax_1y_1 + ax_2y_2 + \ldots + ax_ny_n \\ &= a(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) \\ &= a(\bar{x} \cdot \bar{y}), \end{aligned}$$

   joten ehto (S2) on voimassa.

3. Tehtävässä tulee tarkistaa jälleen, että ehdot (S1)-(S5) ovat voimassa. Muistele lukiossa opittuja integraalin ominaisuuksia. Ehtojen (S4) ja (S5) kanssa apuun tulee kurssin Analyysi II (kevään 2013) kurssimateriaalin Seuraus 4.12 1).

   Esimerkkinä ehdon (S1) todistus:

   Olkoot $f, g \in C[0,1]$. Tällöin

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = g \cdot f,$$

   joten ehto (S1) on voimassa.

4. Tehtävässä tulee tarkistaa, toteuttaako annettu yhtälö kurssikirjan sivulla 17 kohdassa 1.6 annetut ehdot (N1)-(N3). Mikäli ehdot toteutuvat, ne täytyy todistaa yksitellen samaan henkeen kuin tehtävissä 2 ja 3. Jos taas jokin ehdoista ei toteudu, riittää antaa vastaesimerkki.