

Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Harjoitustehtävät 1
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Nämä tehtävät käsittelevät kirjan kappaleita 0 ja 1. Ne käydään läpi laskuharjoituksissa torstaina 5.9.2013.

1. Määritä tarkasti seuraavat joukot

- a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + n]$,
- b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + n]$,
- c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 1/n]$,
- d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 1/n]$.

2. Palauta mieleesi kursseilta Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II tuttu avaruuden \mathbb{R}^n pistetulo (kurssikirjan esimerkki 1.3 sivulla 16). Osoita, että se toteuttaa sisätulon ehdot (S1) - (S5). Määritä lisäksi pistetulon antaman normin lauseke.

3. Merkitään $C[0, 1] := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Osoita, että kaava

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

määrittelee sisätulon avaruudessa $C[0, 1]$.

4. Määrittelekö yhtälö

$$\|f\| = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|$$

normin avaruudessa $C[0, 1]$? Esitä todistus tai anna vastaesimerkki. Avaruus $C[0, 1]$ määriteltiin edellisessä tehtävässä.