Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Kertaavia tehtäviä joukko-opin perusteista
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Näiden tehtävien tarkoituksena on palauttaa mieleen aiemmilla kursseilla opittuja joukko-opin perusteita, joita tulemme tarvitsemaan kurssilla luultavasti **jokaisella luennolla**. Tehtäviä käydään läpi tarvittaessa viikon 36 laskuharjoituksissa torstaina 5.9., mutta niistä ei saa harjoituspisteitä.

Muistutuksena vielä joitakin määritelmiä. Olkoot $A, B \subset X$ joukkoja. Tällöin määritellään

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in X : x \in A \text{ tai } x \in B\} && \text{(joukkojen } A \text{ ja } B \text{ yhdiste)} \\
A \cap B &= \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \in B\} && \text{(joukkojen } A \text{ ja } B \text{ leikkaus)} \\
A \setminus B &= \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \notin B\} && \text{(joukkojen } A \text{ ja } B \text{ erotus)} \\
A^c &= \{x \in X : x \notin A\} = X \setminus A && \text{(joukon } A \text{ komplementti)}
\end{aligned}$$

Olkoon lisäksi Y joukko, $C \subset Y$ osajoukko ja $f \colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin määritellään

$$\begin{aligned}
fA = \quad f[A] &= \{y \in Y : y = f(a) \text{ jollakin } a \in A\} && \text{(joukon } A \text{ kuva)} \\
f^{-1}C = \quad f^{-1}[C] &= \{x \in X : f(x) \in C\} && \text{(joukon } C \text{ alkukuva)}
\end{aligned}$$

---

1. Olkoon $A = [0, 2]$, $B =]{-7}, 20[$ ja $C = [5, 12[$. Määritä seuraavat joukot:

   a) $A \cup B$,
   b) $A \cap B$,
   c) $A \cap C$,
   d) $B \setminus C$,
   e) B^c,
   f) $(A \cap C)^c$,
   g) $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$[1].

2. Olkoot $A, B, C \subset X$ joukkoja. Todista seuraavat kaavat ja väitteet:

   a) $A \setminus B = A \cap B^c$,
   b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
   c) $A \cup B = B \iff A \setminus B = \emptyset$,
   d) $A \subset B \iff B^c \subset A^c$.

[1] Tätä joukkoa kutsutaan joukkojen B ja C *symmetriseksi erotukseksi*. Sitä merkitään usein $B \Delta C$:llä.

3. Määritellään kuvaukset f, g ja h seuraavasti

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad f(x) = x + 2, \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad h(x) = 6. \end{aligned}$$

Määritä seuraavat joukot:

a) $f\mathbb{R}$,
b) $g]{-\infty}, 2[$,
c) $f^{-1}\{1, 3, 8\}$,
d) $g^{-1}\{2\}$,
e) $g^{-1}\{-2\}$,
f) $h\mathbb{R}$,
g) $h^{-1}]{-\infty}, 2[$,
h) $h^{-1}\{6\}$.

4. Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus ja $A, B \subset X$ ja $C, D \subset Y$ osajoukkoja. Todista seuraavat kaavat ja väitteet:

a) $f[A \cup B] = (fA) \cup (fB)$,
b) $f^{-1}[C \cup D] = (f^{-1}C) \cup (f^{-1}D)$,
c) $f^{-1}[C \cap D] = (f^{-1}C) \cap (f^{-1}D)$,
d) $f^{-1}[D^c] = (f^{-1}D)^c$.

5. Tutki, onko väite $f[A \cap B] = (fA) \cap (fB)$ voimassa kaikilla kuvauksilla $f\colon X \to Y$ ja osajoukoilla $A, B \subset X$.

6. Palauta mieleesi supremumin ja infimumin käsitteet, ja määritä

a) $\sup\{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 5\}$,
b) $\sup\{x \in \mathbb{N}\colon x^2 < 5\}$,
c) $\inf\{f(x)\colon 0 < x < 2\pi\}$, kun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$,
d) $\inf\{x \in \mathbb{Q}\colon x > \sqrt{\pi}\}$.