

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matematiikka tutuksi, Syksy 2013  
Ylimääräiset harjoitukset, palautus viim. ma 28.10. klo 9.00

Seuraavat tehtävät ovat ylimääräiset harjoitukset niille, jotka eivät ole saaneet kasaan kurssin läpäisyyn vaadittua 24 pistettä, mutta ovat saaneet **vähintään** 18 pistettä. Jos kurssista haluaa hyväksytyin, niin näistä tehtävistä on tehtävä **kaikki** ja ne on palautettava luennoitsijalle sähköpostilla maanantaihin 28.10. kello 9.00 mennessä.

1. Todista, että 893 ei ole alkuluku.
2. Todista, että  $n^2 + n + 1$  on pariton kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Olkoon  $A$  ja  $B$  joukkoja. Todista, että  $A \cap B = B$  jos ja vain jos  $B \subset A$ .
4. Laske funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}$$

derivaatta pisteessä  $x = \frac{1}{2}$  käyttämällä suoraan derivaatan raja-arvomääritelmää. (Siis tehtävässä **ei** saa käyttää valmiita derivointikaavoja!)

5. Selitä mikä seuraavassa induktiotodistuksessa on pielessä. Missä tehdään virhe?

$$\text{Väite: } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Seuraava todistus näyttää oikealta, mutta siinä on oltava virhe sillä jos  $n = 6$ , niin yhtälön vasen puoli on  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$  ja oikea puoli on  $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$ .

*Väitteen "todistus":*

Käytetään induktiota. Kun  $n = 1$  niin selvästi  $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1 \cdot 2}$ . Oletetaan sitten, että väite pätee jollekin luvulle  $n \geq 1$  ja osoitetaan, että se pätee myös luvulle  $n + 1$ . Nyt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

Joten väite on todistettu.

6. Matti, Teppo, Lasse ja Seppo pitivät saunailtaa ja saunaan mennessä kaikki heittivät pyyhkeensä umpimähkään pukuhuoneen hyllylle. Saunasta tullessa he ottivat pyyhkeensä hyllyltä umpimähkään. Millä todennäköisyydellä

- a) jokainen heistä saa oman pyyhkeensä?
- b) kukaan heistä ei saa omaa pyyhettä?
- c) ainakin yksi heistä saa oman pyyhkeensä?