

Matemaattinen logiikka 2013

Laskuharjoitukset 9

1. Näytä, että funktiot $c(y, x) = x^y$ ja $C_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisia.
2. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $\pi(x, y) = ((x + y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.
3. Osoita, että **rajoitettu vähennyslasku**

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{jos } x \geq y \\ 0 & \text{jos } x < y \end{cases}$$

on primitiivirekursiivinen.

4. Oletetaan, että R on 1-paikkainen primitiivirekursiivinen relaatio. Merkittään $R_n = \{x \in R \mid x < n\}$. Näytä, että $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen kun $f(n)$ on joukon R_n alkioden lukumäärä kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
5. Oletetaan, että $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisia ja $(g \circ f)(x) \geq x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Näytä, että joukko $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on primitiivirekursiivinen.
6. Osoita, että funktio $n \mapsto p_n$ on primitiivirekursiivinen.