Matemaattinen logiikka 2013

Laskuharjoitukset 8

1. Olkoon T L-teoria, φ L-kaava ja $c \notin L$. Näytä, että jos $T \vdash \varphi(c/v_0)$ niin $T \vdash \forall v_0 \varphi$.

2. Olkoon T L-teoria. Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

   (i) kaikilla L-lauseilla $\forall v_i \varphi$ löytyy vakio $c \in L$ jolla $T \vdash \varphi(c/v_i) \to \forall v_i \varphi$,

   (ii) kaikilla L-lauseilla $\exists v_i \varphi$ löytyy vakio $c \in L$ jolla $T \vdash \exists v_i \varphi \to \varphi(c/v_i)$.

3. Olkoon T L-teoria siten, että jokaisessa L-struktuurissa ainakin jokin $\varphi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\varphi_0, ..., \varphi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \varphi_0 \vee ... \vee \varphi_n$.

4. Olkoon $L = \{c_i | i \in \mathbb{N}\}$ ja T sellainen L-teoria, että jokaisella $M \models T$ ja $a \in M$ löytyy sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $c_i^M = a$. Näytä, että löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $T \vdash \bigvee_{k<m\leq n} c_k = c_m$, missä $\bigvee_{k<m\leq n} c_k = c_m$ tarkoittaa kaikkien kaavojen $c_k = c_m$ disjunktiota, missä $k < m \leq n$.

5. Näytä, että $Th((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <))$ ei ole $\aleph_0$ -kategorinen.

6. Oletetaan, että teorian T jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli jonka universumissa on tasan kolme alkiota. Osoita, että teorialla T itsellään on malli jonka universumissa on tasan kolme alkiota.