

# Matemaattinen logiikka 2013

## Laskuharjoitukset 5

1. Olkoon  $\mathcal{M} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, P, Q)$ , missä  $P = \{0, 1, 2\}$  ja  $Q = \{2, 3, 4\}$ . Mitkä ovat struktuurin  $\mathcal{M}$  määriteltävät osajoukot?
2. Osoita, että annetun struktuurin  $\mathcal{M}$  määriteltävien osajoukkojen perhe sisältää tyhjän joukon, koko joukon  $M$  ja on suljettu yhdisteen, leikkauksen ja komplementin suhteen (eli on ns. Boolean algebra).
3. Olkoon  $M = \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}$  ja  $f : M \rightarrow M$  s.e.  $f(x) = 5$  kaikilla  $x \in M$ . Mitkä ovat struktuurin  $(M, f)$  määriteltävät osajoukot?
4. Olkoon  $M = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : m \leq n < 57\}$  ja  $E \subseteq M^2$  siten että  $((n, m), (k, l)) \in E$  joss  $n = k$ . Mitkä ovat struktuurin  $(M, E)$  määriteltävät osajoukot?
5. Olkoon  $\mathbb{Q}$  rationaalilukujen joukko,  $<$  tämän joukon tavallinen järjestys (relaatio) ja  $S : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  sellainen, että kaikilla  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $S(x) = x + 1$ . Onko
  - (a) alkio  $-5$ ,
  - (b) alkio  $1/3$

määriteltävä struktuurissa  $(\mathbb{Q}, S, 0, <)$  ?

6. Olkoon  $t$   $L$ -termi, jossa esiintyy muuttujat  $v_0, \dots, v_n$ . Olkoot  $t_0, \dots, t_n$   $L$ -termejä. Olkoon  $t'$  saatu  $t$ :stä korvaamalla  $v_i$  termillä  $t_i$ , kun  $i = 0, \dots, n$ . Todista:  $(t')^M \langle s \rangle = t^M \langle s' \rangle$ , kun

$$s'(i) = \begin{cases} t_i^M \langle s \rangle & i \leq n \\ s(i) & i > n \end{cases}$$