Matemaattinen logiikka 2013

Laskuharjoitukset 12

1. Relaatiota $R \subseteq \mathbb{N}^2$ sanotaan *rekursiivisesti numeroituvaksi* jos joukko $\{\pi(x,y) : R(x,y)\}$ on rekursiivisesti numeroituva. Osoita, että jos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on funktio, niin seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

   (a) f on rekursiivinen.

   (b) Relaatio $\{(n, f(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ on rekursiivinen.

   (c) Relaatio $\{(n, f(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ on rekursiivisesti numeroituva.

2. Osoita, että jos A ja B ovat epätyhjiä joukkoja niin seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

   (a) Sekä A että B ovat rekursiivisesti numeroituvia joukkoja.

   (b) $A \times B$ on rekursiivisesti numeroituva relaatio.

3. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää äärettömän rekursiivisen joukon.

4. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että joukko
$$\{n \in \mathbb{N} : \forall z \leq n \exists y R(n,y,z)\}$$
on rekursiivisesti numeroituva.

5. Oletetaan, että joukot $A_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat sellaisia, että joukko $\{\pi(m,n) : m \in A_n\}$ on rekursiivisesti numeroituva. Näytä, että näiden joukkojen diagonaalinen leikkaus
$$\Delta_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \in A_n \text{ kaikilla } n \leq m\}$$
on rekursiivisesti numeroituva.

6. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiivinen ja A niiden $n \in \mathbb{N}$ joukko joilla on olemassa $> n$ monta sellaista $m \in \mathbb{N}$, että $f(m) = n$. Näytä, että A on rekursiivisesti numeroituva.