Matemaattinen logiikka 2013

Laskuharjoitukset 10

1. Näytä, että $A(2, x) = 2x + 3$.
2. Todista: $y + x < A(y, x) < A(y, x + 1) \leq A(y + 1, x)$.
3. Näytä, että kaikilla $a, b \in \mathbb{N}$ löytyy äärellinen $X_{ab} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jolla pätee:
   (i) $(a, b) \in X_{ab}$,
   (ii) jos $(0, x + 1) \in X_{ab}$ niin $(0, x) \in X_{ab}$,
   (iii) jos $(y + 1, 0) \in X_{ab}$ niin $(y, 1) \in X_{ab}$,
   (iv) jos $(y+1, x+1) \in X_{ab}$ niin $(y+1, x) \in X_{ab}$ ja $(y, A(y+1, x)) \in X_{ab}$.
4. Näytä, että Ackermannin funktio on rekursiivinen.
5. Sanotaan, että $R \subseteq \mathbb{N}$ on **lukuteoreettinen** jos se on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^2$ on sellainen, että kaikilla lukuteoreettisilla $P \subseteq \mathbb{N}$ löytyy $m \in \mathbb{N}$ jolla $x \in P$ joss $(x, m) \in R$, kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Näytä, että R ei ole lukuteoreettinen.
6. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla

$$R = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$