

# Matemaattinen logiikka 2013

## Laskuharjoitukset 1

- Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan aksioomeja kun  $A, B$  ja  $C$  ovat propositiolauseita (perustele vastauksesi):
  - $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$ .
  - $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ .
  - $(p_0 \rightarrow (B \rightarrow C))$ .
  - $((A \rightarrow B) \rightarrow A)$ .
- Anna todistus  $\{A, (A \rightarrow C), (A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C))\} \vdash B$ . Lauseita 2.4, 2.5, 2.6, 2.18 ja 2.19 saa käyttää, joskaan niistä ei liene hyötyä.
- Anna todistus  $\vdash (A \rightarrow (A \vee B))$ . Lauseita 2.4, 2.5, 2.6, 2.18 ja 2.19 saa käyttää.
- Anna todistukset  $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$  ja  $\vdash (A \rightarrow \neg\neg A)$ . Lauseita 2.4, 2.5, 2.6, 2.18 ja 2.19 saa käyttää.
- Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:
  - $S \vdash A$ ,
  - On olemassa äärellinen jono  $(A_i)_{i \leq n}$  propositiolauseita jolla
    - $A_n = A$ ,
    - Jokaisella  $i \leq n$ ,  $A_i$  on joko  $S$ :n alkio, aksiooma tai on saatu MP:lla jonon aikaisemmista jäsenistä.
- Jos  $A$  ja  $B$  ovat äärellisiä merkkijonoja, niin  $v(A)$  tarkoittaa  $A$ :ssa esiintyvien vasenten sulkumerkkien lukumäärää,  $o(A)$  tarkoittaa  $A$ :ssa esiintyvien oikeiden sulkumerkkien lukumäärää ja  $AB$  tarkoittaa merkkijonoa joka saadaan liittämällä merkkijono  $B$  merkkijonon  $A$  perään. Todista, että jos  $A$  ja  $B$  ovat merkkijonoja ja  $AB$  on propositiolause, niin  $v(B) \leq o(B)$ .