Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

27.11.2013

Helsingin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Lisäpisterajoja laskettiin hieman. Huomaa, että kurssilla Johdatus yliopistomatematiikkaan on nyt erilaiset pisterajat kuin tällä kurssilla.
- Punainen väri alkaa loppua, joten tästä eteenpäin kukkaleimat voivat olla myös sinisiä.
- Muistathan, että tehtäviä on tärkeää tehdä itse. Muuten ei opi. (Lihaksiakaan ei voi kasvattaa niin, että laittaa kaverin nostelemaan painoja.) Yhteistyö on kuitenkin hyvä juttu.

Lineaarikuvauksen ominaisvektorit

Keksi iskulause ominaisvektoreille. Mitä ominaisvektorit oikein ovat? Miten ne käyttäytyvät?

`aktivator.jamo.fi`

Injektio ja surjektio

Lineaarikuvausta $L\colon V \to U$ voidaan luonnehtia sen ytimen ja kuvan avulla.

- Kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.
- Kuvaus L on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = U$.

Injektiivisyys ja ydin

Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $L\colon V \to U$ pätee $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Osoitetaan, että L on injektio.

Pistetulon laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

(b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

(c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$.

(d) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Sisätulo

Määritelmä

Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Esimerkkejä

- Vektoreiden pistetulo on sisätulo.
- Kaava $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 3v_1 w_1 + v_2 w_2$ määrittää erään toisen sisätulon avaruudessa $\mathbb{R}^2$.
- Avaruudessa $\mathcal{P}_2$ voi määritellä sisätulon vaikkapa kaavalla $\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \rangle = 3a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2$.
- Funktioavaruudessa

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$$

voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

Miksi sisätulo on mielenkiintoinen?

Sisätulon avulla voidaan määritellä muun muassa

- vektorin pituus
- vektorien kohtisuoruus
- projektio.

Esimerkki

Tutkitaan polynomiavaruutta $\mathcal{P}_2$ varustettuna sisätulolla, joka määritellään seuraavasti:

$$\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \rangle = 3a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Mikä on polynomin $p = 4 + 3x - x^2$ normi eli pituus?