Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

20.11.2013

Helsingin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Muistathan, että tehtäviä saa korjata kaksi kertaa.
- Jos otit kokeen mukaan kokeenkatsomistilaisuudesta, palauta se Johannalle (oman oikeusturvasi vuoksi).
- Kaikki paperit on tarkistettu ja kirjattu.

Virittäminen

Halutaan osoittaa, että vektorit $(1,2)$ ja $(1,1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. On siis osoitettava, että $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}((1,2),(1,1))$.

- On selvää, että $\mathrm{span}((1,2),(1,1)) \subset \mathbb{R}^2$.
- On vain osoitettava, että $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{span}((1,2),(1,1))$.

Halutaan osoittaa, että vektorit $(1,1,0)$ ja $(1,2,1)$ virittävät avaruuden $W = \mathrm{span}((1,1,0),(2,3,1),(0,1,1))$. On siis osoitettava, että $W = \mathrm{span}((1,1,0),(1,2,1))$.

- On osoitettava, että $\mathrm{span}((1,1,0),(1,2,1)) \subset W$
- ja $W \subset \mathrm{span}((1,1,0),(1,2,1))$.

Luentokysymys

Tutkitaan kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(a,b,c,d) = (a-b, 2c+2d)$$

ja aliavaruutta $W = \mathrm{span}((1,0,0,1))$.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

(a) Vektori $(0,3,0,0)$ on lineaarikuvauksen L ytimessä.

(b) $(1,2) \in LW$

(c) On olemassa lineaarikuvaus, jonka ytimessä ei ole yhtään vektoria.

Ydin, aliavaruuden kuva, kuva

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus ja W on aliavaruuden V aliavaruus.

- $\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}$
- $LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$
- $\operatorname{Im} L = LV$

Tehtävä: Lineaarialgebran kurssilla oleva kaverinne ei tiedä, mitä lineaarikuvauksen kuvalla ($\operatorname{Im} L$) tarkoitetaan. Miten selittäisitte asian hänelle?

Tehtävä

Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit x_1-akselin suhteen.

(a) Määritä kuvauksen L ydin $\operatorname{Ker} L$.

(b) Määritä $\operatorname{Im} L$ (eli avaruuden $\mathbb{R}^2$ kuva $L\mathbb{R}^2$).

Injektio ja surjektio

Lineaarikuvausta $L\colon V \to U$ voidaan luonnehtia sen ytimen ja kuvan avulla.

- Kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.
- Kuvaus L on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = U$.