Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

6.11.2013

Helsingin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Jos haluat uusia kokeen, voit suorittaa kurssin yleistentissä. Lisätietoa löytyy kurssisivulta.

Herääkö luennon aikana kysymyksiä?

- Voit kysyä kysymyksiä osoitteessa `aktivator.jamo.fi`. Valitse "Kysymyksiä luennolla 6.11.2013" ja kirjoita kysymyksesi kommenttilaatikkoon.
- Tarjolla on myös Wanhanajan aktivaattori. Kirjoita kysymys paperilapulle ja jätä sen luennon päätteeksi luennoitsijalle.

Opiskelijan kysymys

Milloin $1\bar{v} \neq \bar{v}$?

Esimerkki: Laskutoimituksia voi keksiä itse

Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c .$$

Joukko $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus.

Kaikki itse keksityt laskutoimitukset eivät tuota vektoriavaruuksia

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a * (v_1, v_2) = (av_1, 0).$$

Joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $+$ ja skalaarikertolaskulla $*$ vektoriavaruus **ei ole vektoriavaruus**.

Vektoriavaruudessa voidaan määritellä

- Vektoreiden virittämä aliavaruus
- Vapaus
- Kanta
- Koordinaatit
- Dimensio

Vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden* $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus on aliavaruus.

Tehtävä

Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Anna esimerkki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruudesta, johon A kuuluu ja B ei kuulu.

Esimerkki: Vapaus

Onko polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ jono $(x^3 - 2x - 2,\ x^3 - 2,\ 4x)$ vapaa?

Toisin sanoen, ovatko vektorit $x^3 - 2x - 2$, $x^3 - 2$ ja $4x$ lineaarisesti riippumattomia?