Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

5.11.2013

Helsingin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Kokeenkatsomistilaisuus tänään klo 10.00–11.00 luentosalia vastapäätä.
- Jos haluat uusia kokeen, voit suorittaa kurssin yleistentissä. Lisätietoa löytyy kurssisivulta.

Herääkö luennon aikana kysymyksiä?

- Voit kysyä kysymyksiä osoitteessa `aktivator.jamo.fi`. Valitse "Kysymyksiä luennolla 5.11.2013" ja kirjoita kysymyksesi kommenttilaatikkoon.
- Tarjolla on myös Wanhanajan aktivaattori. Kirjoita kysymys paperilapulle ja jätä sen luennon päätteeksi luennoitsijalle.

Pohdintaa: Erilaisia laskutoimituksia

- Vektorien yhteenlasku
- Kompleksilukujen kertolasku (tai reaalilukujen kertolasku)
- Vektorien pistetulo
- Vektorien skalaarikertolasku

Mitä yhteistä edellä mainituilla on? Mitä eroa niillä on?

Pohdittavaa: Miksi vektoriavaruuksia?

Miksi vektoriavaruudet ovat kiinnostavia? Mitä hyötyä käsitteestä on?

Tehtävä

Tutkitaan suoraa

$$S = \{(0,2) + t(2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Onko se vektoriavaruus, kun laskutoimituksina ovat vektorien tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku?

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

(b) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.

(c) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

(d) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Aliavaruuden luonnehdinta

Aliavaruus on vektoriavaruus toisen vektoriavaruuden sisässä.
(Laskutoimitusten pitää olla samat.)

Tehtävä: Mitä mieltä olet ratkaisusta?

Tehtävä: Osoita, että $W = \{(-a, 3a, 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.
Ratkaisu:

$$(-a, 3a, 4b) + (-c, 3c, 4d) = (-(a+c), 3(a+c), 4(b+d)) \in W$$
$$r(-a, 3a, 4b) = (-ra, 3ra, 4rb) \in W, \ \ r \in \mathbb{R}$$
$$(0, 0, 0) \in W$$

Siten W on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.