Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

30.10.2013

Helsingin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Perjantaisin ei ole luentoa.
- Käytä uutta kurssitunnusta.
- Jos tarvitset tulevaan kurssikokeeseen lisäaikaa esim. lukihäiriön takia, ota mahdollisimman pian yhteyttä Johannaan.
- Muista antaa kurssipalautetta!

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

(b) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.

(c) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

(d) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Esimerkkejä vektoriavaruuksista

- $\mathbb{R}^4$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään tavalliseen tapaan
- $\mathbb{R}^{5\times 2}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään tavalliseen tapaan
- Kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko $\mathcal{P}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään koulusta tutulla tavalla

Esimerkkejä vektoriavaruuksista

- $\mathbb{R}^4$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään tavalliseen tapaan
- $\mathbb{R}^{5\times 2}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään tavalliseen tapaan
- Kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko $\mathcal{P}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään koulusta tutulla tavalla

Edellä lueteltujen joukkojen alkioita voi kutsua vektoreiksi. Sanalla vektori on siis uusi määritelmä!

Funktioavaruus

Vektoriavaruuden alkiot voivat olla funktioita.

Funktioavaruus

Vektoriavaruuden alkiot voivat olla funktioita.

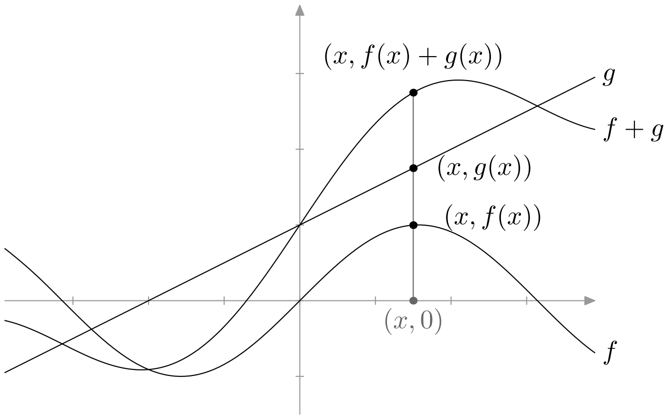
Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko.

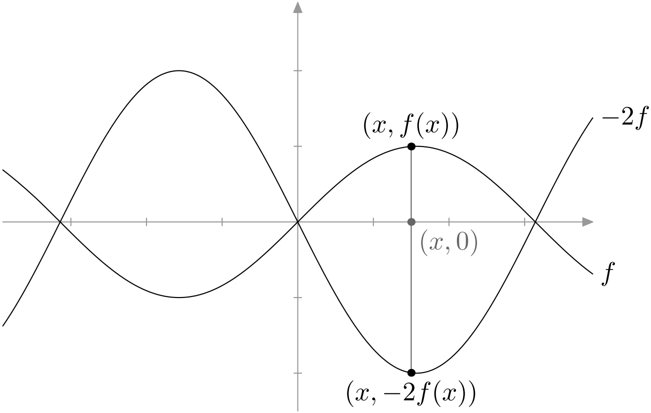
Funktioavaruus

Vektoriavaruuden alkiot voivat olla funktioita.

Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko.

Joukko $\mathcal{F}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään ns. pisteittäin.


$(x, f(x) + g(x))$
g
$f + g$
$(x, g(x))$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f



$-2f$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f
$(x, -2f(x))$

Laskutoimituksia voi keksiä itse

Määritellään joukossa $\mathbb{R}$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti:

$$x \boxplus y = x + y + 1 \quad \text{ja} \quad \text{c} \boxdot x = c(x+1) - 1.$$

kaikilla $x, y, c \in \mathbb{R}$.

Laskutoimituksia voi keksiä itse

Määritellään joukossa $\mathbb{R}$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti:

$$x \boxplus y = x + y + 1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{c} \boxdot x = c(x+1) - 1.$$

kaikilla $x, y, c \in \mathbb{R}$.

(a) Määritä $1 \boxplus 5$ ja $-2 \boxdot 3$.

Laskutoimituksia voi keksiä itse

Määritellään joukossa $\mathbb{R}$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti:

$$x \boxplus y = x + y + 1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{c} \boxdot x = c(x+1) - 1.$$

kaikilla $x, y, c \in \mathbb{R}$.

(a) Määritä $1 \boxplus 5$ ja $-2 \boxdot 3$.

(b) Voidaan osoittaa, että joukko $\mathbb{R}$ varustettuna yhteenlaskulla $\boxplus$ ja skalaarikertolaskulla $\boxdot$ on vektoriavaruus.

Mitkä tahansa itse keksityt laskutoimitukset eivät tuota vektoriavaruutta.

Mitkä tahansa itse keksityt laskutoimitukset eivät tuota vektoriavaruutta.

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a * (v_1, v_2) = (av_1, 0).$$

Mitkä tahansa itse keksityt laskutoimitukset eivät tuota vektoriavaruutta.

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a * (v_1, v_2) = (av_1, 0).$$

Joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $+$ ja skalaarikertolaskulla $*$ vektoriavaruus **ei ole vektoriavaruus**.

Tehtävä

Tutkitaan joukkoa

$$S = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \bar{v} \| \leq 1\}.$$

Tehtävä

Tutkitaan joukkoa

$$S = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\,\bar{v}\,\| \leq 1\}.$$

Onko S vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna ja skalaarikertolaskuna ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku?

Milloin osajoukko on vektoriavaruus?

Halutaan tutkia, onko vektoriavaruuden osajoukko vektoriavaruus. Mitkä vektoriavaruuden ehtoja pitää tutkia?

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Uusi aliavaruuden määritelmä yleistää vanhaa määritelmää.

Esimerkki

Osoitetaan, että joukko $W = \{(a, -2a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Aliavaruuden luonnehdinta

Aliavaruus on vektoriavaruus toisen vektoriavaruuden sisässä.
(Laskutoimitusten pitää olla samat.)