Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

29.10.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Kurssikokeen tulokset ilmestyvät lähipäivinä.
- Jos et osallistunut kurssille Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I tänä syksynä, lue kurssisivu huolellisesti läpi. Jos jokin asia on epäselvä, kysy Johannalta tai ohjaajilta.
- Ilmoittaudu kurssille! Muuten et voi palauttaa tehtäviä. Tällä kurssilla saat **uuden** henkilökohtaisen kurssitunnuksen.
- Jos tarvitset tulevaan kurssikokeeseen lisäaikaa esim. lukihäiriön takia, ota mahdollisimman pian yhteyttä Johannaan.
- Muista antaa kurssipalautetta!

Milloin suoritit kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I?

- tänä syksynä
- syksyllä 2012
- syksyllä 2011
- avoimessa yliopistossa tänä kesänä
- avoimessa yliopistossa aiemmin
- joskus muulloin tai jossain muualla
- en ole suorittanut kurssia

Mikä vektori on?

Valitse mielestäsi sopivin vaihtoehto.

Vektori on

- A nuoli, jolla on suunta ja pituus
- B nuoli, joka lähtee aina origosta
- C (a, b)
- D $ai + bj$
- E geenitekniikan apuväline
- F Muu vaihtoehto
- G En tiedä

Äänestä: aktivator.jamo.fi

Tehtävä

Tutkitaan 2×3-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

(a) Onko olemassa matriisia $Y \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, jolle pätee $A + Y = A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$?

(b) Merkitään $B = \left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right]$. Etsi matriisi B', jolle pätee $B + B' = Y$, missä Y on edellisessä kohdassa löydetty matriisi.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

(g) $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

Matriisien laskusääntöjä

Oletetaan, että $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A + O = A$

(d) $A + (-A) = O$

(e) $a(A + B) = aA + aB$

(f) $(a + b)A = aA + bA$

(g) $(ab)A = a(bA)$

(h) $1A = A$.

Sana ”vektori” saa nyt uuden, yleisemmän merkityksen.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0}$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Esimerkkejä

- Avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna ja skalaarikertolasku määritellään tavalliseen tapaan.
- Vektorit voivat olla myös vaikkapa matriiseja. Kaikkien $m \times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m \times n}$ muodostaa vektoriavaruuden.

Uuden määritelmän mukaan vektoreiden ei tarvitse olla avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita!

Yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun täytyy olla vektoriavaruuden laskutoimituksia. Niiden tulosten pitää siis kuulua vektoriavaruuteen.

Polynomiavaruus

Esimerkiksi $-2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$ on polynomi.

Yleisesti reaalikertoiminen polynomi on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

oleva summa, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Polynomeja voidaan laskea yhteen ja kertoa skalaareilla

Merkitään

$$p = 3x^2 - 4x + 10 \qquad \text{ja} \qquad q = -2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x.$$

Nyt

$$p + q = -2x^5 - x^3 + 8x^2 + 10$$

ja

$$(-3)p = -9x^2 + 12x - 30$$

.

Polynomiavaruus

Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden. Tätä vektoriavaruutta merkitään symbolilla $\mathcal{P}$.

Polynomit ovat siis vektoreita.

Mikä on polynomiavaruuden nollavektori? Entä mikä on vektorin $-4x^3 + x - 15$ vastavektori? Miten perustelet vastauksesi?

Tiivistelmä

Vektoriavaruuden määritelmässä mainitut laskusäännöt pätevät muun muassa

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille
- matriiseille
- polynomeille.

Kyseiset laskusäännöt toteuttavaa rakennetta kutsutaan vektoriavaruudeksi ja sen alkioita vektoreiksi.

Sana vektori ei siis enää tarkoita pelkästään joukon $\mathbb{R}^n$ alkiota. Sille on annettu uusi määritelmä.

Paluu menneisyyteen (eli ykköskurssin asioihin)

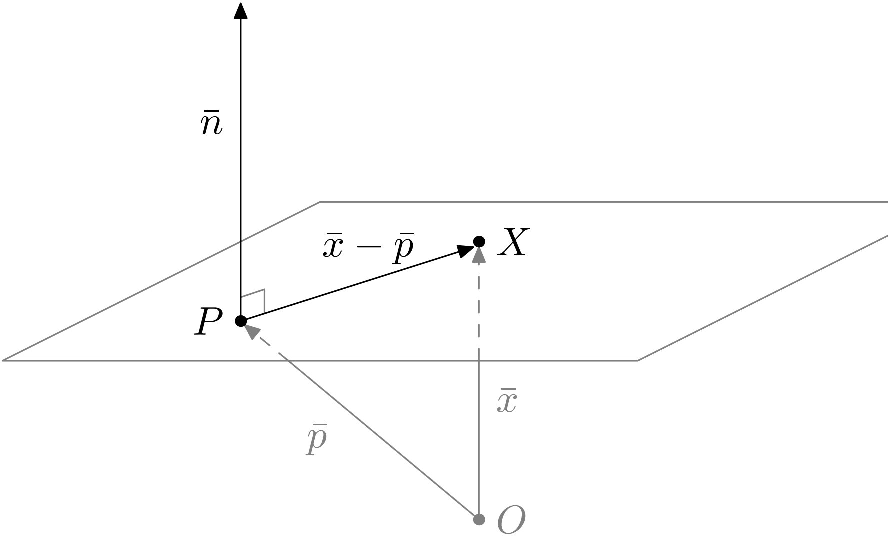
Mitkä kaikki avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit ovat kohtisuorassa vektoria $\bar{v} = (0, -3, 0)$ vastaan? Miltä näyttää näiden vektorien muodostama joukko?

Millaisen joukon muodostavat vektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\bar{v} = (-1, 2, 7)$ vastaan?

Tason normaali

Tason *normaali* on vektori, joka on kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vastaan.

Tason normaalimuotoinen yhtälö



Esimerkki

Taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Miltä näyttää tason normaalimuotoinen yhtälö?