**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2013**
**Harjoitus 6**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: to 5.12.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: Ei tähtitehtäviä

## Tehtäväsarja I

1. Pohdi ilman laskuja, miltä näyttää seuraavissa tapauksissa aliavaruuden $W$ kohtisuora komplementti $W^\perp$. Määritä sen jälkeen komplementti täsmällisesti.

$$\text{(a) } W = \operatorname{span}((0,2,0)) \qquad \text{(b) } W = \mathbb{R}^3$$

## Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.4, jossa käsitellään projektiota.

2. Merkitään $W = \operatorname{span}((2,-2,1),(-1,1,4))$ ja $\bar{v} = (1,2,3)$. Määritä vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle $W$. Mitä sinun tulee tarkistaa ennen projektion määrittämistä?

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden $W$ ja toinen aliavaruuden $W^\perp$ alkio.

## Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\bar{v}_2 = (0,3,3)$ ja $\bar{v}_3 = (3,2,4)$.

4. Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ muodostavat kannan avaruudelle $\mathbb{R}^3$. Muokkaa kannasta ortonormaali kanta Gramin–Schmidtin menetelmää käyttäen.

5. Määritä vektorin $(4,10,-15)$ koordinaatit edellisessä tehtävässä määrittämäsi kannan suhteen. (*Neuvo:* Käytä hyväksesi sitä, että kanta on ortonormaali.)

6. Määritä vektorin $(2,-1,4)$ projektio aliavaruudelle $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Tarvitset tässä tehtävää 4!

## Tehtäväsarja IV

7. Oletetaan, että $V$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $U$ sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

**Tehtäväsarja V**

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 21, jossa käsitellään isomorfismeja.

Tutkitaan alakolmiomatriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ sekä kuvausta $L\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto (a, b, c)$.

8. Osoita, että kuvaus $L$ on lineaarinen.

9. Määritä kuvauksen $L$ ydin ja kuva. Päättele niiden avulla, että $L$ on isomorfismi.

10. Olet nyt osoittanut, että vektoriavaruudet $U$ ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfiset. Selitä omin sanoin, miten sen voi arvata katsomalla vektoriavaruuksien $U$ ja $\mathbb{R}^3$ määritelmiä.

**Grande finale**

Valitse seuraavista tehtävistä vähintään kolme. Jäljelle jäävät ovat ylimääräisiä tehtäviä.

11. Keksi surjektiivinen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^3$ avaruudelle $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi. Pystytkö keksimään neljä erilaista kuvausta?

12. Oletetaan, että $A$ on $n \times n$-matriisi. Osoita aliavaruuden määritelmän nojalla, että joukko $\{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = 2\bar{v}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

13. Lineaarikuvaus $L$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((2,3))$ suhteen. Diagonalisoi lineaarikuvauksen $L$ standardimatriisi. (Tätä varten sinun ei tarvitse määrittää standardimatriisia.) Päättele diagonalisoinnin perusteella, miltä standardimatriisi näyttää.

14. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tiedetään, että erään vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ koordinaattivektori kannan $S$ suhteen on $[\bar{v}]_{\mathcal{S}} = (4, 1)$. Lisäksi seuraavat kannanvaihtomatriisit ovat tiedossa:

$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritä

(a) $[\bar{v}]_{\mathcal{T}}$ (b) $[\bar{v}]_{\mathcal{R}}$ (c) $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}}$

15. Piirrä itsellesi käsitekartta, jossa ovat ainakin seuraavat käsitteet:

Gramin–Schmidtin menetelmä, kohtisuoruus, kohtisuora komplementti, kohtisuora komponentti, normi, ortogonaalinen kanta, ortogonaalisuus, ortonormaali kanta, projektio, sisätulo