**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2013**
**Harjoitus 5**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 29.11.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 13.12.2013 klo 19.30

## Tehtäväsarja I

1. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus ensin peilaa tason vektorit pystyakselin suhteen ja sitten kiertää niitä origon ympäri 180° vastapäivään.
2. Olkoon $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_2$ sellainen lineaarikuvaus, että $T(x+1) = (0,4)$ ja $T(x^2-1) = (5,5)$. Määritä $T(3x^2+3x)$.
3. Kuvaus $L$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((-1,2))$ suhteen ja venyttää niiden pituuden sen jälkeen kaksinkertaiseksi. Määritä ilman laskuja kuvauksen ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.
4.* Oletetaan, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisarvo $\lambda_1 = 1/3$, jota vastaa ominaisvektori $\bar{v}_1 = (-1,1,1)$, ja ominaisarvo $\lambda_2 = 2$, jota vastaa ominaisvektori $\bar{v}_2 = (0,2,0)$. Määritä $L(-3,1,3)$.
5. Oletetaan, että neliömatriisi $A$ on kääntyvä ja sillä on ominaisarvo $\lambda$. Osoita, että käänteismatriisilla $A^{-1}$ on ominaisarvo $\lambda^{-1}$.

## Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 22.

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4,\ x_1+2x_3-x_4).$$

6. Etsi virittäjät ytimelle $\operatorname{Ker} L$ ja kuvalle $\operatorname{Im} L$.
7. Määritä ytimen ja kuvan dimensiot. (Dimensiolauseesta on apua.)
8. Onko $L$ injektio? Entä surjektio?

## Tehtäväsarja III

Ryhdy tutustumaan kurssimateriaalin lukuun 24, joka käsittelee sisätuloa.

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1w_1 + (v_2w_2)/4$. Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan tätä sisätuloa.

9. Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (2,4)$, $\bar{b} = (-1,2)$ ja $\bar{c} = (-2,4)$ Mitkä niistä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun sisätulo määritellään edellä annetulla kaavalla?
10. Määritä ne vektorit $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|\bar{x}\| = 1$. Hahmottele sitten kuva tutkittavan sisätuloavaruuden yksikköympyrästä.

**Tehtäväsarja IV**

Tarkastellaan vektoriavaruutta $C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Tässä avaruudessa voidaan määritellä sisätulo kaavalla $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

11. Tutkitaan funktioita $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ja $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x$. Määritä sisätulo $\langle f, g\rangle$.

12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä projektio $\mathrm{proj}_g(f)$. (Sisätuloavaruuden projektio määritellään samalla tavalla kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallinen projektio.)

13. Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden $C([0,1])$ alkiota, jotka ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan. Voit halutessasi käyttää hyväksi edellistä tehtävää.

**Tehtäväsarja V**

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.3, jossa käsitellään kohtisuoraa komplementtia.

14. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$?

    (a) $\bar{v} = (-6, 4)$ (b) $\bar{v} = (1, 1)$

15. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mieti kuvan avulla, miltä aliavaruus $W$ ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$ näyttävät. Tarkkaa perustelua ei tarvita.

**Tehtäväsarja VI**

16. Piirrä käsitekartta, jossa ovat ainakin seuraavat käsitteet.

    injektio, kuva, lineaarikuvaus, matriisi, ominaisarvo, ominaisavaruus, ominaisvektori, surjektio, ydin

**Ylimääräinen tehtävä**

17. Oletetaan, että $V$ ja $U$ ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joille pätee $\dim(V) > \dim(U)$. Onko olemassa injektiivistä lineaarikuvausta avaruudelta $V$ avaruudelle $U$?