Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 22.11.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: to 5.12.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Onko olemassa lineaarikuvausta $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $T(1,1) = (0,2,4)$, $T(3,-1) = (1,-3,0)$ ja $T(4,0) = (1,1,5)$?

2. Etsi ilman laskuja matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus peilaa tason vektorit suoran $\mathrm{span}((1,1))$ suhteen. (Neuvo: Miten kantavektorit kuvautuvat? Kurssimateriaalin luvusta 22.1 on apua.)

3. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$, $L(a,b) = ax^2 + (a+b)x + 3b$. Osoita, että L on lineaarikuvaus.

4.* Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että projektiokuvaus

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad P(\bar{x}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$$

on lineaarinen. (*Neuvo:* Älä kirjoita vektorien komponentteja näkyviin.)

Tehtäväsarja II

5. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$

Määritä kuvauksen L ydin $\mathrm{Ker}(L)$.

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä kuva $\mathrm{Im}(L)$. Etsi sille jotkin virittäjät.

7. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja merkitään $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Osoita, että $LW = \mathrm{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$.

8. Selitä omin sanoin ilman matemaattisia symboleja, mikä tulos edellisessä tehtävässä osoitettiin. Tässä ei ole tarkoitus selittää todistuksen välivaiheita, vaan ainoastaan tulos, jonka osoitit. Lyhyt ja ytimekäs vastaus siis riittää!

9. Jatketaan kuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2)$$

tutkimista. Merkitään $W = \mathrm{span}((1,2,1),(1,3,0))$. Määritä joukko LW ja etsi sille virittäjät.

Tehtäväsarja III

Tethtävissä 10–12 tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a,b) = (2a+5b, 2b)$.

10. Osoita, että L on lineaarikuvaus etsimällä matriisi, jonka määräämä L on.

11. Määritä edellisen tehtävän avulla kuvauksen L ominaisarvot.

12. Määritä kuvauksen L ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet.

13. Päättele seuraavissa tapauksissa ilman laskuja lineaarikuvauksen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

    (a) Lineaarikuvaus T on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa ja venytys kaksinkertaiseksi pystysuunnassa.
    (b) Lineaarikuvaus T on projektio suoralle $\operatorname{span}((-2,3))$.

14. Autiomaassa elää kojootteja ja maantiekiitäjiä. Niiden kantojen vuosittaiset koot riippuvat toisistaan seuraavasti: Olkoon $K(n)$ kojoottien lukumäärä vuonna n ja $M(n)$ maantiekiitäjien lukumäärä vuonna n. Tällöin

    $$K(n+1) = 0{,}86K(n) + 0{,}08M(n)$$

    ja

    $$M(n+1) = -0{,}12K(n) + 1{,}14M(n).$$

    Kuinka suuret pitää kojootti- ja maantiekiitäjäkantojen olla, jotta seuraavana vuonna molemmat kannat olisivat kasvaneet samassa suhteessa? (Toisin sanoen $K(n+1) = aK(n)$ ja $M(n+1) = aM(n)$ jollakin $a \in \mathbb{R}$.)

Ylimääräinen tehtävä

15. Tutkitaan funktioita

    $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = x, \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad h(x) = e^x. \end{aligned}$$

    Onko funktioavaruuden $\mathcal{F}$ jono (f,g,h) vapaa?