Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 15.11.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 29.11.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 19, joka käsittelee lineaarikuvauksia.

1. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x$ on lineaarinen.
2. Osoita määritelmän perusteella, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ ei ole lineaarinen.
3. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ 2x_1)$ lineaarinen?
4. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (|x_1|\,,\ |x_2|)$ lineaarinen?

Tehtäväsarja II

5. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,2)$ ja $L(0,1) = (-1,1)$. Määritä $L(3,-2)$.
6. Tutkitaan matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ määräämää lineaarikuvausta L_A. Määritä vektorin $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ kuvavektori kuvauksessa L_A.
7. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus on
$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2,\ 2x_1 + x_2,\ 3x_1 - 2x_2).$$

Tehtäväsarja III

Ryhdy tutustumaan lukuihin 19.1 ja 20.1, joissa käsitellään aliavaruuden kuvaa lineaarikuvauksessa sekä lineaarikuvauksen ydintä.

Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3)$.

8. Tutkitaan lähtöavaruuden aliavaruutta $W = \operatorname{span}((1,2,1))$. Keksi kolme vektoria, jotka ovat aliavaruuden W kuvassa LW.
9. Onko vektori $(1,-1,1)$ kuvauksen L ytimessä (eli joukossa $\operatorname{Ker} L$)? Entä vektori $(0,3,3)$?

Tehtäväsarja IV

10.* Joukko $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ on vektoriavaruus, kun laskutoimituksina ovat matriisien tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Virittävätkö vektorit
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
avaruuden V?

11. Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$. Määritä kannanvaihtomatriisin $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ avulla seuraavien vektorien koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen:

$$(4,1,2), \quad (0,0,-100), \quad (a,b,c), \text{missä } a,b,c \in \mathbb{R}$$

12. Osoita, että $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,2,1))$ on avaruuden $W = \text{span}((1,1,0),(2,3,1),(0,1,1))$ kanta.

13.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Tee seuraavista kohdista ne, jotka on mahdollista ratkaista. Jos ratkaiseminen ei ole mahdollista, kerro, mistä se johtuu.

(a) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6)$.

(b) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6,0)$.

Tehtäväsarja V

14. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

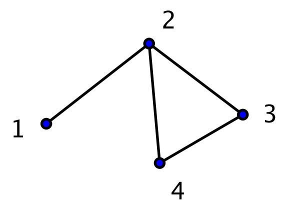
$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehdot 6 ja 7 pätevät joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

Tehtäväsarja VI

15. Neljän kaupungin välillä kulkee lentoreittejä oheisen kaavion mukaisesti. Tilannetta voidaan havainnollistaa 4×4-matriisilla A, joka määritetään seuraavasti: $A(i,j) = 1$, jos kaupunkien i ja j välillä on suora lentoreitti, ja $A(i,j) = 0$, jos suoraa lentoreittiä ei ole.

Kirjoita lentoreittiverkostoa vastaava matriisi A.



16. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske matriisipotenssi A^2. Mitä sen alkiot kertovat erilaisista reittivaihtoehdoista?

Ylimääräinen tehtävä

17. Harjoituksessa 2 osoitettiin, että kahden aliavaruuden summa on aina aliavaruus. Millä muilla tavoilla kahdesta aliavaruudesta voidaan muodostaa uusia aliavaruuksia? (Vihje: Voit miettiä esimerkiksi joukko-operaatioita.)