Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 8.10.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 22.10.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Jatka tutustumista lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia.

1. Osoita aliavaruuden määritelmän avulla, että $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 2z = 0\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Miltä aliavaruus W näyttää?
2. Osoita, että polynomi $x^3 - 3$ kuuluu polynomien $2x^3$, $x - 2$ ja x virittämään aliavaruuteen.
3. Onko vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavien vektoreiden virittämä?
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
4. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Osoita, että
$$\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \operatorname{span}(-\bar{v},\ 2\bar{w},\ \bar{v} + \bar{w}).$$
Neuvo: Kaksi joukkoa voi osoittaa samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

Tehtäväsarja II

Näiden tehtävien tekemisessä tarvitset lukuja 17 ja 18, jotka käsittelevät vapautta ja kantaa.

5. Merkitään
$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Osoita, että jono (B_1, B_2, B_3, B_4) on vapaa.
6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että $\mathcal{S} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta. Määritä matriisi, jonka koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $(-1, 4, 3, 5)$.
7. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((3, 3), (2, 1))$ ja $\mathcal{T} = ((1, 2), (1, -1))$ sekä vektoria $\bar{b} = (5, 4)$.
   (a) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$.
   (b) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{T}}$.
   (c) Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}$ kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$.
   (d) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{T}}$ käyttämällä kohtia a) ja c). Vertaa tulosta b)-kohdassa määritettyyn koordinaattivektoriin.
8. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (-2x,\ x^2 + 4x,\ 3)$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. (Lauseesta 18.13 on hyötyä.) Mikä on polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen?
9. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Osoita, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole yhdensuuntaisia.

Tehtäväsarja III

10.* Tutki aliavaruuden määritelmän avulla, onko joukko

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \ a+b+c=0 \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

11.* Tutki aliavaruuden määritelmän avulla, onko joukko $W = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) = 2\}$ polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

Tehtäväsarja IV

Matriiseja voi käyttää viestien salaamiseen. Näissä tehtävissä salaamiseen käytetään 3×3-matriisia. Ensin viesti muutetaan $3 \times n$-matriisiksi seuraavalla tavalla: Viestin kirjaimet koodataan niitä vastaaviksi järjestysnumeroksi aakkosissa ja numerot järjestetään matriisiksi ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle. Tyhjä tila täytetään numerolla 0. Esimerkiksi viestiä ”maamyyrä” vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} 13 & 13 & 18 \\ 1 & 24 & 27 \\ 1 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

Tätä matriisia kerrotaan vasemmalta salauksessa käytettävällä matriisilla, jonka vain viestin lähettäjä ja vastaanottaja tietävät. Kertolaskun tulos lähetetään vastaanottajalle.

12. Tehtävänäsi on lähettää viesti ”tuhoa tiedostot”. Salauksessa käytetään matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Miltä näyttää salattu viesti, jonka lähetät?

13. Saat salatun viestin

$$\begin{bmatrix} 24 & 29 & 29 & 21 & 43 & 2 & 24 & 41 \\ 20 & 9 & 21 & 1 & 21 & 1 & 19 & 20 \\ 19 & 39 & 27 & 40 & 22 & 19 & 25 & 41 \end{bmatrix}.$$

Salauksessa on käytetty samaa matriisia kuin edellisessä tehtävässä. Miten voit matriisien teorian avulla selvittää, mitä viestissä sanotaan?

Ylimääräinen tehtävä

14. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruudet W ja U. Aliavaruuksien W ja U *summa* on joukko

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

(a) Jos $V = \mathbb{R}^3$, W on x-akseli ja U on y-akseli, miltä näyttää $W + U$?

(b) Osoita, että jos W ja U ovat avaruuden V aliavaruuksia, myös summa $W + U$ on avaruuden V aliavaruus.