**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2013**
**Harjoitus 1**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 1.11.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 15.11.2013 klo 19.30

*Käytä tehtävien palauttamisessa uutta kurssitunnusta. Saat sen sähköpostitse.*

Tehtävällä 15 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

## Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 15, joka käsittelee vektoriavaruuksia.

1. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$, joka koostuu kaikista $2 \times 2$-matriiseista. (Joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään tuttuun tapaan.) Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on matriisin $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. vastavektori? Perustele vastauksesi vektoriavaruuden määritelmän avulla.

2. Piirrä kuva joukosta $K = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Osoita, että $K$ varustettuna vektorien tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.

3. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos $x$, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c .$$

   Laske $3 \oplus 4$ ja $-3 \odot 2$.

4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on vektorin 6 vastavektori?

## Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia.

5. Merkitään $W = \{(3x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Piirrä kuva joukosta $W$.
   (b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.
   (c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
   (d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.

(e) Totea, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

6. Olkoon $U$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $(1,0,3) \in U$ ja $(0,-2,-1) \in U$. Osoita, että myös vektorit $(0,-8,-4)$ ja $(-1,-2,-4)$ ovat aliavaruuden $U$ alkioita. Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmän avulla.

7. Tarkastellaan $2 \times 2$ -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että joukko $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ -3b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

8. Piirrä kuva joukosta $U = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$. Onko $U$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus? Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmän avulla.

9.* Merkitään $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Oletetaan, että $U$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus ja $A$, $B \in U$. Päteekö tällöin välttämättä $3I \in U$? (Tässä $I$ on ykkösmatriisi.) Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmän avulla.

### Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 13.4, jossa käsitellään pistetulon sovelluksia.

10. Määritä vektorin $\bar{v} = (0,-5)$ projektio vektorin $\bar{w} = (1,2)$ virittämälle suoralle. Piirrä tilanteesta kuva.

11. Suora $S$ kulkee pisteen $A = (3,1,1)$ kautta ja sen suuntavektori on $\bar{v} = (-1,1,0)$. Määritä pisteen $B = (1,0,2)$ etäisyys suorasta $S$. Käytä apuna projektiota.

12. Oletetaan, että tasolla $T$ on normaali $\bar{n} = (-3,2,0)$ ja taso kulkee pisteen $P = (2,-1,-1)$ kautta. Määritä tason $T$ normaalimuotoinen yhtälö. Tutki, onko piste $A = (-2,1,-1)$ tasossa $T$.

### Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 14, jossa käsitellään ristituloa.

13. Laske $\bar{u} \times \bar{w}$, jos

    (a) $\bar{u} = (0,1,1)$ ja $\bar{w} = (3,-1,2)$ (b) $\bar{u} = (3,-1,2)$ ja $\bar{w} = (0,1,1)$.

14. Merkitään $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,-3)$ ja $C = (0,0,-2)$. Määritä pisteiden $A$, $B$ ja $C$ kautta kulkevan tason $T$ normaalimuotoinen yhtälö.

### Ylimääräinen tehtävä

15. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Todista Pythagoraan lause:

$$\bar{v} \text{ ja } \bar{w} \text{ ovat ortogonaaliset, jos ja vain jos } \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v} + \bar{w}\|^2.$$

*Neuvo:* Muotoa ”jos ja vain jos” olevat väitteet todistetaan kahdessa osassa.