Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 11.12.2013
Ratkaisuehdotuksia

1. (a) Lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pätee

$$L(1,0) = (1,5,1) \quad \text{ja} \quad L(0,1) = (0,0,4).$$

Mikä on lineaarikuvauksen L matriisi? Määritä $L(-1,3)$.

(b) Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (1,2,0)$ ja $\bar{v}_2 = (-2,0,0)$. Keksi ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisvektorin määritelmän avulla.

Ratkaisuehdotus:

a) (4 pistettä) Lineaarikuvauksen L matriisin sarakkeina ovat kantavektorien kuvavektorit. Siis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vektorin $(-1,3)$ kuvavektori saadaan nyt helpoten kertomalla vektoria lineaarikuvauksen matriisilla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Siten $L(-1,3) = (-1,-5,11)$.

b) (8 pistettä) Osoitetaan, että vektori $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ on kuvauksen L ominaisvektori. Lineaarikuvauksen ja ominaisvektorin määritelmän mukaan

$$L(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 = \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2).$$

Siten $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

Itse asiassa kaikki vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatiot ovat kuvauksen L ominaisarvoa λ vastaavia ominaisvektoreita.

2. (a) Tutkitaan matriiseja

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että jono $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

(b) Minkä matriisin koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(5, 1, -1, 0)$?

Ratkaisuehdotus:

a) (8 pistettä) Jonossa $\mathcal{B}$ on neljä vektoria ja avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio on neljä. Riittää siis osoittaa, että jono $\mathcal{B}$ on vapaa tai että se virittää avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoitetaan vapaus, sillä se on helpompaa.

Oletetaan, että $c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 + c_4B_4 = O$ joillakin $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Nyt

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mistä saadaan

$$\begin{bmatrix} -c_1 & c_1 + c_3 + 2c_4 \\ c_3 & 2c_2 + c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tätä yhtälöä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -c_1 &= 0 \\ c_1 + c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ 2c_2 + c_4 &= 0. \end{cases}$$

Nyt siis tiedetään, että $c_1 = 0$ ja $c_3 = 0$. Näiden tietojen perusteella yhtälöryhmän toisesta yhtälöstä seuraa, että $c_4 = 0$. Tämän nojalla puolestaan viimeisestä yhtälöstä saadaan $c_2 = 0$. Siten $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$, eli jono $\mathcal{B}$ on vapaa.

Vaihtoehtoisesti tehtävän voi ratkaista osoittamalla, että jono $\mathcal{B}$ sekä virittää avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ että on vapaa. Huomaa kuitenkin, että molemmat näistä vaativat hyvin samanlaisen yhtälöryhmän ratkaisemista. Kun on ratkaissut virittämiseen liittyvän yhtälöryhmän, sen ratkaisu antaa myös vapauteen liittyvän yhtälöryhmän ratkaisun. Ei siis kannata tehdä turhaa työtä.

Kolmas tapa ratkaista tehtävä on osoittaa, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkio voidaan esittää *täsmälleen yhdellä tavalla* jonon $\mathcal{B}$ vektoreiden lineaarikombinaationa.

b) (4 pistettä) Kysytty matriisi on

$$5 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Anna esimerkki polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudesta, johon polynomi x kuuluu ja polynomi $x^2 + 1$ ei kuulu. Perustele vastauksesi.

   (b) Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on aliavaruus

$$W = \{(a - b,\ a + 2b,\ a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Kirjoita $\bar{v} = (0, 8, -2)$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden $W^\perp$ alkio.

Ratkaisuehdotus:

a) (4 pistettä) Kurssimateriaalin perusteella tiedetään, että joukko $\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 1\}$ on avaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus. Siihen kuuluu polynomi x, joka aste on yksi, muttei polynomi $x^2 + 1$, jonka aste on kaksi.

Myös vaikkapa aliavaruus $\text{span}(x) = \{ax \mid a \in \mathbb{R}\}$ kelpaa vastauksesi.

b) (8 pistettä) Etsityt vektorit ovat $\text{proj}_W(\bar{v})$ ja $\text{perp}_W(\bar{v})$. Määritetään siis tarvittava projektiovektori. Ensin on löydettävä avaruudelle W ortogonaalinen kanta. Huomataan, että

$$\begin{aligned} W &= \{(a-b,\ a+2b,\ a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, a, a) + (-b, 2b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 1, 1) + b(-1, 2, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 1, 1), (-1, 2, -1)). \end{aligned}$$

On vielä tarkistettava, ovatko avaruudelle W löydetyt virittäjät ortogonaaliset. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 1, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, 2, -1)$. Huomataan, että $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = -1 + 2 - 1 = 0$. Siten virittäjävektorit ovat ortogonaaliset. Ortogonaalisuudesta seuraa myös vapaus, joten kyseessä on ortogonaalinen kanta.

Nyt voidaan laskea projektio:

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(\bar{v}) &= \text{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \text{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) \\ &= \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 \\ &= \frac{6}{3}\bar{w}_1 + \frac{18}{6}\bar{w}_2 \\ &= 2\bar{w}_1 + 3\bar{w}_2 \\ &= (2, 2, 2) + (-3, 6, -3) \\ &= (-1, 8, -1). \end{aligned}$$

Kohtisuora komponentti puolestaan on $\text{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}) = (0, 8, -2) - (-1, 8, -1) = (-1, 0, -1)$.

Näin saadaan $\bar{v} = (-1, 8, -1) + (-1, 0, -1)$. Projektio $\text{proj}_W(\bar{v}) = (-1, 8, -1)$ on aliavaruuden W alkio ja kurssin tulosten perusteella tiedetään, että kohtisuora komponentti on $\text{perp}_W(\bar{v}) = (-1, 0, -1)$ on aliavaruudessa $W^\perp$.

Tehtävän voi myös ratkaista selvittämällä ortogonaalisen komplementin $W^\perp$ ja etsimällä sen jälkeen pyydetyt vektorit yhtälöryhmän avulla.

4. (a) Selitä lyhyesti, mihin kannanvaihtomatriiseja käytetään. (Sinun ei tarvitse kertoa kannanvaihtomatriisin määritelmää.)

(b) Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Olkoon $L\colon V \to U$ sellainen lineaarikuvaus, että jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa. Osoita, että L on injektio.

Ratkaisuehdotus:

a) (4 pistettä) Jos tiedetään vektorin koordinaatit jonkin kannan suhteen ja halutaan selvittää vektorin koordinaatit toisen kannan suhteen, kannanvaihtomatriisi auttaa asiassa. Kannanvaihtomatriisilla kerrotaan tunnettua koordinaattivektoria ja tuloksena on koordinaattovektori toisen kannan suhteen.

b) (8 pistettä) Osoitetaan, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Koska tiedetään, että $\bar{0} \in \operatorname{Ker} L$, riittää osoittaa, että $\operatorname{Ker} L \subset \{\bar{0}\}$.

Oletetaan, että $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$. Nyt $\bar{v} \in V$, joten $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Koska $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$, pätee $L(\bar{v}) = \bar{0}$. Toisaalta lineaarisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}
L(\bar{v}) &= L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) \\
&= L(a_1\bar{v}_1) + \cdots + L(a_n\bar{v}_n) \\
&= a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n).
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa, joten $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. Siten $\bar{v} = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_n = \bar{0}$.

Nyt on osoitettu, että ainoa vektori, joka kuvautuu nollavektorille, on nollavektori. Toisin sanoen $\operatorname{Ker} L \subset \{\bar{0}\}$. Näin ollen $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, eli kuvaus L on injektio.