Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

1.10.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Mitkä seuraavista ovat yhtäpitäviä vapauden määritelmän kanssa?

Jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

A $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$

B $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$

C Jos $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

D Yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

E Nollavektori voidaan kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Äänestä: aktivator.jamo.fi

Vastaus

Ainoastaan kohta D on yhtäpitävä vapauden määritelmän kanssa.

Esimerkki

Halutaan tutkia, virittävätkö vektorit $\bar{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\bar{b}_3 = (2, -2, 0)$ ja $\bar{b}_4 = (-1, 1, -1)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki jatkuu

Yhtälöryhmän matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -a_1 - a_2 + 2a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_3 \end{array}\right]$$

Kysymys: Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$?

Vastaus

Virittävät.

Esimerkki

Halutaan tutkia, virittävätkö vektorit $\bar{v}_1 = (1, 0, 3, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 0, -2, 0)$, $\bar{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ ja $\bar{v}_4 = (-1, 1, -1, 1)$ avaruuden $\mathbb{R}^4$.

Oletetaan, että $\bar{a} \in \mathbb{R}^4$. Nyt $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ joillakin $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Tutkitaan, onko seuraavalla yhtälöllä ratkaisuja:

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 + x_4\bar{v}_4 = \bar{a},$$

missä $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Esimerkki jatkuu

Yhtälöryhmän matriisi saadaan muotoon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{2}a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_2 \end{array}\right]$$

Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^4$?

Vastaus

Eivät viritä.

Dimensio

Määritelmä

Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä.

Käänteismatriisi

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että B on matriisin A *käänteismatriisi*.

Käänteismatriisin voi määrittää Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä (ks. esim. 10.8).