Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

9.10.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Koe

- Ke 16.10. klo 12.00-15.00 Exactumin auditorioissa.
- Jos et pääse osallistumaan kurssikokeeseen esimerkiksi sairastumisen vuoksi, ota mahdollisimman pian yhteyttä Johannaan.
- Kokeessa saa käyttää laskinta muttei taulukkokirjaa.
- Koe alkaa tasalta. Ole paikailla ajoissa.
- Jätä laukkusi ja takkisi ym. tavarat salin takaosaan tai laidalle.
- Yliopisto tarjoaa vastauspaperit.
- Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Älä käytä kurssikoodia.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Esimerkki

Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo -2, sillä

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eräs ominaisarvoa -2 vastaava ominaisvektori on $(1, -3, -1)$.

Ominaisarvojen löytäminen

Matriisilla A on ominaisarvo λ, jos ja vain jos

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

jollakin nollasta poikkeavalla vektorilla $\bar{v}$.

Ominaisarvo

Lause

Reaaliluku λ on neliömatriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esimerkki

Määritetään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kaikki ominaisarvot.

Projektio