Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

8.10.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Koe

- Ke 16.10. klo 12.00-15.00 Exactumin auditorioissa.
- Jos et pääse osallistumaan kurssikokeeseen esimerkiksi sairastumisen vuoksi, ota mahdollisimman pian yhteyttä Johannaan.
- Kokeessa saa käyttää laskinta muttei taulukkokirjaa.
- Koe alkaa tasalta. Ole paikailla ajoissa.
- Jätä laukkusi ja takkisi ym. tavarat salin takaosaan tai laidalle.
- Yliopisto tarjoaa vastauspaperit.
- Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Älä käytä kurssikoodia.

Kokeeseen valmistautuminen

- Kertaa harjoitustehtävät.
- Älä lue mallivastauksia kuin kurssimateriaalia. Käytä mallivastauksia vain tarkistaaksesi, onko oma ratkaisusi oikein.
- Lue luentomateriaalista läpi koealue. Tärkeää on osata määritelmät. Nippelitietoa ei kysytä kokeessa.
- Pidä huolta, että sinulla on kokonaiskuva kurssista. Esimerkiksi käsitekartta voi olla hyödyllinen.
- Yleisohjaajat päivystävät koeviikolla. Heiltä kannattaa kysyä apua.

Käääntyvien matriisien lause

Lause

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. Matriisi A on kääntyvä.
2. Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.
3. Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.
4. Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.
5. Matriisi A on alkeismatriisien tulo.
6. Matriisi A ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

Alkeismatriisi

Alkeismatriisilla kertominen on sama asia kuin alkeisrivitoimituksen tekeminen.

Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\frac{1}{2}a_{31} & -\frac{1}{2}a_{32} & -\frac{1}{2}a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Käänteismatriisin etsiminen

Miksi eliminointimenetelmällä voi etsiä käänteismatriisin tai osoittaa, että sellaista ei ole?

Oletko samaa mieltä?

Oletetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa.

Tällöin $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ ja $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$.

Oletko samaa mieltä? Äänestä: aktivator.jamo.fi

Vastaus

En ole samaa mieltä. Edellisellä kalvolla ollut väite ei tarkoita mitään.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Ominaisvektorien löytäminen

Etsitään kaikki matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit.

Ominaisarvo

Lause

Reaaliluku λ on neliömatriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Valitse oikea vaihtoehto

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_5$ ovat viisi avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoria.

Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_5$ virittämä aliavaruus

A on $\mathbb{R}^4$.

B saattaa olla $\mathbb{R}^4$.

C ei ole $\mathbb{R}^4$.

Äänestä: `aktivator.jamo.fi`

Vastaus

Oikea vaihtoehto on B.