

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

13.9.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Harjoituksen 1 ratkaisuehdotus on ilmestynyt. Muista tarkistaa tähdettömät tehtävät.
- Vaikka ratkaisut olisivatkin menneet läpi tarkistuksesta, lue silti kommentit.
- Kaikissa kurssikoodeissa on tarkoitus olla kolme numeroa. Tunnuksista L001–L099 nollat ovat jääneet vahingossa pois. Lisää tunnukseesi puuttuvat nollat.

Gaussin-Jordanin menetelmä

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan matriisi alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot R_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki jatkuu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(1/4)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tuloksena redusoitu porrasmatriisi

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja? Määritä niitä vastaavat yhtälöryhmät.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$c) \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{array} \right]$$