Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

11.9.2013

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Tehtävät on tarkistettu.
- Kirjoita korjaukset **uudelle** paperille ja nido ne alkuperäisten tehtävien perään.
- Kaikissa kurssikoodeissa on tarkoitus olla kolme numeroa. Tunnuksista L001–L099 nollat ovat jääneet vahingossa pois. Lisää tunnukseesi puuttuvat nollat.

Mitä eilen tehtiin?

Merkitään $\bar{w} = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_1 = (3, -1, 2)$, $\bar{v}_2 = (2, 2, 4)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 0, 1)$. Päteekö $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?

On ratkaistava yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$. Siitä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmien ratkaiseminen: Ekvivalentit yhtälöryhmät

Määritelmä

Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ideana on johtaa yhtälöryhmästä uusia ekvivalentteja yhtälöryhmiä alkeisrivitoimituksilla.

Yhtälöryhmien ratkaiseminen: Alkeisrivitoimitukset

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2. Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.
3. Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Yhtälönratkaisun idea

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{alkeisrivi-}\\ \cdots \\ \text{toimituksia}\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right. \quad \leftarrow \begin{array}{c}\text{samat}\\ \text{ratkaisut}\end{array} \rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \qquad &= \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}\right.$$

Porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina.
2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat porrasmatriiseja?

A $\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right]$

B $\left[\begin{array}{ccccccc|c} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{array}\right]$

C $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$

D $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -4 & \sqrt{2} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Mene osoitteeseen `http://aktivator.jamo.fi` ja äänestä.

Ratkaisu

A $\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right]$

B $\left[\begin{array}{ccccccc|c} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{array}\right]$

C $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$ ei ole porrasmatriisi

D $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -4 & \sqrt{2} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Redusoitu porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi.
2. jokaisen rivin johtava alkio on 1.
3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$